த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண் — 481

கணிதப் பொருளாதாரம்

துணைப்பாடம்

(முதல் பகுதி)

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்படுகிறது

ஆசிரியர்கள்

துரை. இரத்தின சபாபதி, எம். எஸ்ஸி., டி. ஓ. ஆர்.
இணைப் பேராசிரியர், புள்ளியியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

கே. ஆர். சந்தானகோபாலன், எம். எஸ்ஸி.,
துணைப் பேராசிரியர், புள்ளியியல் துறை,
பூ. சா. கோ. கலைக்கல்லூரி,
கோயம்புத்தூர்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—August, 1973

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 481

© Tamil Nadu Text Book Society

MATHEMATICAL ECONOMICS
Ancillary (Part I)

D. RATNASABAPATHY and

K. R. SANTHANAGOPALAN

Price Rs. 8-20

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by
KUMARAN PRESS,
298, Mint Street,
Madras-1.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கியதின் மூன்றுண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டு தோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'கணிதப் பொருளாதாரம்–துணைப்பாடம்' (முதல் பகுதி) என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 481ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 516 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

முகவுரை

இரு ஆசிரியர்களும் தனித்தனியே எழுதியுள்ளதால் சில சொற்றொடர்களுக்கான தமிழ்ச் சொற்கள் இந் நூலில் சில இடங்களில் மாறுபட்டு வந்திருப்பதைக் காணலாம். எனினும் இவை ஒரே அர்த்தத்தைக் குறிக்கும் இரு வேறு தமிழ்ச் சொற்கள் எனக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக Example என்ற சொல்லை ஒருவர் 'மாதிரி' அல்லது 'எடுத்துக்காட்டு' என்றும், மற்றொருவர் 'உதாரணம்' என்றும் குறித்துள்ளார்.

Marginal revenue என்பதற்கு, 'விளிம்பு வருவாய்' என்று ஒருவரும், 'இறுதிநிலை வருமானம்' என்று மற்றவரும் எழுதி இருக்கின்றனர்.

Consumer என்பதற்கு 'துய்ப்போர்', 'நுகர்வோர்' என்ற இரு சொற்களும் சரியான தமிழே.

இவ்வாருகச் சில சொற்கள் மட்டுமே மாறுபட்ட விளக்கத்துடன் இருவராலும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளபோதிலும் அவை ஒரே அர்த்தத்தைத்தான் குறிக்கின்றன.

மற்ற மாறுபட்ட அர்த்தங்கள் கொண்ட சொற்களையும் வேறு சில திருத்தங்கள் இருந்தால் அவற்றையும் தெரிவிப்பது நல்லது.

"கணிதப் பகுப்பாய்வின் அறிமுகம்" (பொருளாதாரப் பிரச்சினைகளின் பயன்கள் உள்பட) — என்ற நூலின் ஆசிரியர்கள் P. H. டாஸ், W. M. ஒய்பர்ன் இருவர்களுக்கும், இந் நூல் வெளியீடு செய்த 'அடிசன்—வெஸ்லி' நிறுவனத்தினருக்கும் அந் நூலிலிருந்து முக்கிய கருத்துகளையும், அட்டவணைகளையும் எடுத்துப் பயன்படுத்த அனுமதி அளித்ததற்கு நன்றியினைத் தெரிவித்துக் கொள்ளுகின்றோம்.

ஆசிரியர்கள்.

பொருளடக்கம்

			பக்கம்
1.	தோற்றுவாய்	...	1
2.	நுகர்ச்சி இயல்	...	10
3.	தேவையும் அளிப்பும்	...	20
4.	சார்புடை விலை மதிப்புகள்	...	64
5.	வகையீட்டுக் கெழுக்கள்	...	70
6.	துய்ப்போரின் சமநிலை	...	81
7.	சமநோக்கு வளைகோடுகள் ஆய்வு		89
8.	துய்ப்போர் சமநிலைக் கோட்பாடு (கணித முறையில்)	...	110
9.	உற்பத்தி இயல்	...	124
10.	உற்பத்தி விளைவின் விதிகள்—காரணிகளின் பதிலீடு	...	150
11.	வருவாயும் செலவும்	...	174
12.	மடக்கை வகையீடும் சார்பலனின் நெகிழ்ச்சியும்	...	201
13.	பொருளாதார நெகிழ்ச்சிகள்	...	216
14.	சர்வாதீனம்	...	245
15.	இரட்டைச் சர்வாதீனம்	...	275
16.	இணைப்பு உற்பத்தியும், சர்வாதீன நிலையும், காரணிகளின் தேவையை நிர்ணயித்தலும்		290
17.	நுகர்வோர், உற்பத்தியாளர் உபரி மதிப்பீடுகள்	...	328
18.	கூட்டு வட்டி, இன்றைய மதிப்பு, மூலதன மதிப்பு	...	351
	அட்டவணை - 1	...	366
	அட்டவணை - 2	...	368
	அட்டவணை - 3	...	373
	அட்டவணை - 4	...	377
	அட்டவணை - 5		382
	பார்வைக்குரிய நூல்கள்	...	384
	கலைச்சொற்கள்	...	386

கணிதப் பொருளாதாரம்

துணைப்பாடம்

(முதல் பகுதி)

1. தோற்றுவாய்

கடந்த இருபது ஆண்டுகளில் பொருளாதாரத் துறையின் எல்லா கிளைகளிலும் கணித முறைகளைப் பயன்படுத்த வேண்டிய அவசியம் கூடிவருவதைக் காண்கிறோம். பாரம்பரியமாகக் கையாளப்பட்டு வந்துள்ள பொருளாதாரத் தத்துவங்கள் கணித முறைகளில் சூத்திரமாக்கப்பட்டுள்ளன. நுண்ணினப் பொருளாதாரத்தில் (Micro-Economics) அங்கம் வகிக்கும் அங்காடிச் சமநிலைத் தத்துவங்கள் (Market equilibrium), பயன்பாடு (utility), லாப உச்சப்பாடு அடைதல் (Profit maximisation) முதலியன அடிப்படையிலேயே கணிதப் பண்புகளைக் கொண்டுள்ளதைக் காணலாம். எனவே கணிதத்தின் பயனனது பல புதிய வழிகளை வழி வகுத்துக் கொடுத்திருக்கிறது.

இந்த அபிவிருத்தியின் ஆரம்ப கட்டத்தில் பொருளாதார வல்லுநர்கள் இரு பிரிவுகளில் பிரிந்திருந்தனர். அதாவது கணிதத்தை உபயோகப்படுத்தும் கணிதப் பொருளாதார வல்லுநர்கள் ; கணிதத்தைப் பயன்படுத்தாத வல்லுநர்கள் ; ஆனல் நாட்கள் செல்லச்-செல்ல பின் சொல்லப்பட்டவர்களும் கணிதத்தின் பயனை உணர்ந்து முன்னையவர்களுடன் ஒன்றி விட்டனர். தற்போது பொருளாதாரத் துறையின் எல்லா வல்லுநர்களும், மாணவர்களும் பொருளாதாரத்தை நன்கு அறிந்து கொள்ள, ஆவலுடன் கணதத் துறையின் அடிப்படைப் பிரிவுகளைக் கற்க முன்வருவதைக் கண்கூடாகக் காண்கிறோம். ஆகவே இவர்களுக்குக் கணிதத்தை விளக்குவதுடன், கணித முறையில் பொருளாதாரத்தை விளக்கமாக விவரிப்பதே சிறந்ததாகும். உயர்மட்ட கணிதத்தின் கடினமான தத்துவங்களை அறிந்திராத, ஆனல் அடிப்படைத் தத்துவங்களை அறிந்து பயிற்சி பெற்ற பொருளாதாரத் துறை வல்லுநர்களுக்கும், மாணவர்களுக்கும் 'கணிதப் பொருளாதாரம்' (Mathematical Economics) மிகவும் பயன்படும்.

பொருளாதாரம்

வரையறை : பொருளாதாரம் என்பது ஒரு சமூக அறிவியல். பொருள் சேர்க்க வேண்டும் என்ற அவாவினுல் பொருளாதாரப் பிரச்னைகள் தோன்றுகின்றன. தனி நபர்களின் பொருளாதாரப் பிரச்னைகள் பற்றி ஆராய்வதே பொருளாதாரம் எனப்படும். மேலும் தனி நபர்களோ, அல்லது தனி நபர்களின் குழுக்களோ பண்டங்களைத் தயாரித்தல் (production) பரிவர்த்தனை செய்தல், மாற்றிக் கொள்ளல், நுகர்தல் (Consumption exchange) போன்ற பல காரியங்களைச் செய்வது பற்றி ஆராய்வதைப் 'பொருளாதாரம்' என்றும் கூறலாம்.

சமீப காலத்தில் பொருளாதாரம் இரு பெரும் பிரிவுகளில் விஸ்தரிக்கப்பட்டுள்ளன : (1) நுண்ணினப் பொருளாதாரம் (Micro Economics), (2) பருவினப் பொருளாதாரம் (Macro Economics) (தொகையினப் பொருளாதாரம்), நுண்ணினப் பொருளாதாரம் என்பது தனி நபர்களின் அல்லது தனி நபர்களின் குழுக்களின் பொருளாதார நடவடிக்கைகளைப் பற்றிய படிப்பாகும்.

முழு வேலை வாய்ப்பு (Total Employment), நாட்டு வருமானம் (National Income), முதலிய விரிந்த தொகுப்புகளைப் பற்றிய படிப்பே 'தொகையினப் பொருளாதாரம்' எனப்படும். இத்தகைய இரு பிரிவுகள் ஏற்படுவதற்கு முன்னுல், விலை நிர்ணயம், வருமானம் ஆகியவைகளைப் பற்றிய பிரிவுகள் இருந்தன. இந்த வேறுபாட்டுப் பண்புகள் நுண்ணின, பருவினப் பொருளாதாரங்களிலும் இதே போன்று காணப்படுகின்றன. அதாவது நுண்ணினப் பொருளாதாரத்தால் 'விலை நிர்ணயம்' ஒரு முக்கிய இடத்தை வகிக்கின்றது. அதேபோல பருவினப் பொருளாதாரத்தில் 'நாட்டு வருமானத்தின் எல்லைகளை நிர்ணயித்தல்', வழிமுறை வேலை வாய்ப்புத் திட்டங்களை நிர்ணயித்தல்' முதலியன முதலிடத்தை வகிக்கின்றன.

கணிதப் பொருளாதாரத்தில் கணக்கியலின் பயன்

கணித முறையில் பொருளாதாரத்தை ஆராய்வது மிகவும் சக்தி வாய்ந்ததாக இருப்பதால் பொருளாதார வல்லுநருக்கு கணிதம் ஒரு கருவியாக உள்ளது. நுண்ணிய பொருளாதாரத்தில் கணிதம் பெரும்பாலும் பயன்படுகிறது.

வட்டிவீதங்கள், வருமானங்கள், ஆக்குஞ் செலவுகள் (உற்பத்திச் செலவுகள்), அங்காடியில் விற்கப்படும் அல்லது வாங்கப்படும் பொருளின் அளவுகள், ஒரு தொழிற்சாலையில் பயன்

படுத்தப்படும் உற்பத்திக் காரணிகளின் அளவுகள் (Factors of production) முதலியன பொருளாதாரத்தில் மாறுபட்ட அளவுகளைக் காட்டுகின்றன. இவற்றைப்பற்றி நன்கு புரிந்து கொள்ள கணிதச் சார்பலன்கள் உதவுகின்றன. சில சமயங்களில் பொருளாதாரச் சார்பலன்கள் நேர்கோட்டு சார்பலன்களாகவோ அல்லது இருபடிச் சமன்பாடுகளாகவோ சுலபமான முறையில் விவரிக்கப் படுகின்றன. இந்தச் சார்பலன்களின் உருவ அமைப்பிற்கான சில நிபந்தனைகள் கணித வடிவில் ஆங்காங்கே விளக்கப்படுகின்றன. அதாவது ஒரு மதிப்புடைமைச் சார்பலன் (Single valued function), இறங்கும் சார்புப் பலன், வடிவச் சார்பு, ஒரே முறை ஏறும் சார்புப் பலன் increasing function) என்ற கணிதப் பண்புகள் பொருளாதாரத்தில் (Monotonic நிறைய இடங்களில் வருகின்றன.

பல பொருளாதாரப் பிரச்சினைகளைப் பகுமுறைகள் மூலமாக விவரித்தாலும் விளக்கப் படங்கள் மூலமாக விவரிப்பது மிகவும் சிறந்தது. இரண்டு பொருளாதார மாறிகளிடையே காணப்படும் சார்பை ஒரு வளை கோட்டின் மூலமாக விளக்க முடியும். உதாரணமாக தேவை வளைகோடு, செலவு வளைகோடு முதலியன வரைந்தால் அவை ஒரு வளைகோட்டிற்கும் மற்ற வளைகோட்டுக்கு மான தொடர்பை நன்கு சித்தரித்துக் காட்டுகின்றன.

பொருளாதாரம்

வரையறைகளும் குறிக்கோள்களும் : பொருளாதார இயல் ஆக்கம், வளர்ச்சி, மாற்றம், பகிர்வு ஆகிய நான்கு முக்கிய பிரிவு களின் தன்மைகளைப் பற்றி அலசி ஆராய்வதாகும். இந் நான்கின் குறைபாடுகள், பிரயோகங்கள் பற்றியும் விளக்குவதாகும்.

ஆதியில் பொருளாதாரம் ஒரு தனி இயலாகக் கருதப்படாமல் அரசியலின் ஒரு பகுதியாகக் கொள்ளப்பட்டது. கிரேக்க மொழியில் Eco என்ருல் வீடு என்று பொருள், Nom என்ருல் விதி என்பதாலும் 'எக்ஞமிக்ஸ்' என்பது வீட்டு விதி அல்லது குடும் பத்தை நடத்தும் விதி என்று கொள்ளப்பட்டது. இன்று ஆங்கி லத்தில் Economics என்றும் தமிழில் 'பொருளாதார இயல்' என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

என்னதான் சிரமப்பட்டுத் தனிப் பெயர் வழங்கிய போதிலும் பொருளாதாரத்தில் அரசியலும், அரசியலில் பொருளாதாரமும் பின்னிப் பின்னி கலந்து இருப்பதைக் காண்கிருேம். பொருளாதாரம் என்பது அரசியலின் பணிப் பெண் எனச் சொன்ஞல் அது முற்றும் பொருந்தும். ஏனெனில் வரிச் சுமைகள், சமூகச் செலவுகள்,

அரசாங்கக் கடன் ஏற்றுமதி, இறக்குமதி, அன்னியச் செலாவணி போன்ற பல பொருளாதார நடவடிக்கைகள் அரதியல் சூழ் நிலையாலும் அரசியல் நடவடிக்கைகளாலும் மிகவும் பாதிக்கப் படுபவை.

பொருளாதாரத்தின் பலவிதமான வரையறைகள்

பல பொருளாதார நிபுணர்கள் பலவிதமான வரையறைகளை அவரவர் நோக்கத்திற்கும் ஆராய்ச்சிக்கும் ஏற்றவாறு கூறி யுள்ளனர். ஆடம்ஸ்மித், ரிக்கார்டோ, மில், சீனியர் போன்ற இங்கிலாந்து நாட்டில் வாழ்ந்த நிபுணர்கள் செல்வத்தை அடிப் படையாகக் கொண்டு பொருளாதாரத்தை வரையறுத்துள்ளனர்.

ஆதியில் பொருளாதாரம் ஒரு செல்வ இயல் என்றே கருதப் பட்டது. பொருளாதாரத்தின் தந்தை எனக் கருதப்படும் 'ஆடம்ஸ்மித்' தாம் எழுதிய நூலிற்கு 'நாடுகளின் செல்வத்தின் இயல்பையும், காரணங்களையும் பற்றிய ஒரு விசாரணை' என்று பெயரிட்டார்.

ரிக்கார்டோ, மில் போன்றோர் செல்வத்தைப் பெருக்குவதற்குத் துணையாக இருக்கும் வழித் துறைகள் எவை என எடுத்துக் கூறும் அறிவியல் என விளக்கம் தந்தனர். பொருளாதார இயல் தன்னலத்தை மையமாகக் கொண்டு, பொருளீட்ட முனையும் மனிதனது நடவடிக்கைகளைப் பற்றிய இயல் என்றும் கூறினர். காலப் போக்கில் செல்வ மீட்டுவதைப் புகழ்ந்துரைத்து தன்னலத்தை சிலாகித்துக் கூறும் பொருளாதாரம் பணத்துக்குப் பூசை செய்யும் இயல் என்று ரஸ்கின், கார்லைல் போன்றோர் இழித் துரைத்தனர். இத்தகைய கெட்ட பெயரை மாற்றிய பெருமை அல்ஃபிரைட் மார்ஷல் (Alfred Marshall 1842 – 1924) என்ற நிபுணரைச் சாரும். பொருளாதார இயலில் முக்கியத்துவம் தர வேண்டியது செல்வத்திற்கு அல்ல, மனிதன் செல்வம் ஈட்டுவதில் ஈடுபடுவதைப் பற்றிப் பயில்வதே 'பொருளாதாரம்' என்றும் திருத்திக் கூறினர்.

மார்ஷலின் வரையறையாவது: பொருளாதாரம் அல்லது அரசியல் பொருளாதாரம் எனும் இயல் சாதாரண மனிதன் அன்றாட வாழ்க்கையில் எவ்வாறு ஈடுபடுகிறான் என்பதை ஆராய்கிறது. நல்வாழ்வுக்குத் தேவையான பொருட்களை எப்படிப் பெறுவது, எப்படிப் பயன்படுத்துவது என்பனவற்றைப் பற்றி நெருங்கிய தொடர்பு கொண்ட தனி நபரின் நடவடிக்கை, சமூக நடவடிக்கை இரண்டையும் பற்றி ஆராய்வதாகும்.

எனவே பொருளாதாரம் செல்வத்தைப் பற்றிய இயல் அன்று. அது செல்வமீட்ட விழையும் மனிதனைப் பற்றிய இயல் என்று தெரிகிறது. சற்று மாற்றிக் கூறினால் பொருளாதாரம் மனிதனுக்கும், செல்வத்திற்குமுள்ள தொடர்பை ஆராய்கிற இயல் எனலாம். மனிதனுக்கும் அரசாங்கத்திற்குமுள்ள தொடர்பை அரசியல் ஆராய்வதுபோல,

மனிதனுக்கும் சமூகத்திற்குமுள்ள தொடர்பை சமூக இயல் ஆராய்வதுபோல,

மனிதனுக்கும் ஆண்டவனுக்குள்ள தொடர்பை தத்துவம் ஆராய்வதுபோல,

மனிதனுக்கும் செல்வத்திற்குமுள்ள தொடர்பை பொருளாதாரம் ஆராய்கிறது எனலாம்.

மார்ஷலின் வரையறையில் மனிதன் என்ற சொல் விருப்பு வெறுப்புடைய சாதாரண மனிதனையே குறிக்கிறது. முற்றும் துறந்த முனிவர்களைப் பற்றியோ, சன்மார்க்கம் இழந்து திரியும் கயவர்களைப் பற்றியோ ஆராயாமல் ஆசைகளும், சுய உணர்வு, மனிதாபிமானம் கொண்ட பெரும்பான்மை மக்கட் குழுவைப் பற்றிய அறிவியலே பொருளாதாரம். சமுதாயத்தோடு ஒட்டி வாழாது, ஒதுங்கி வாழும் (காட்டில் வாழ்ந்த) ராபின்சன் குருசோ, பிர்சான், மம்பட்டியான் போன்ற நபர்களின் நடவடிக்கைகளை இது ஆராயாது. மேலும் பொருளாதாரம் பொருள்சார் நலத்தைப் பெருக்கும் காரணிகளைப் பற்றிய அறிவியல் என்றும், பிகு, கானன் போன்ற பொருளாதார வல்லுநர்களும் ஒத்துக் கொண்டுள்ளனர். ஆனால் லயனல் ராபின்ஸ் (Lionel Robbins) போன்ற அண்மைக் காலத்து நிபுணர்கள் மேற்சொன்ன கருத்தை மறுத்துக் கூறுகின்றனர்.

வாழ்க்கையில் பொருள்சார் நலம் மட்டுமே நலத்தைப் பெருக்குவதில்லை. வாழ்க்கை நிறைவுடையதாகச் செய்ய சில சமயங்களில் பொருள் சாரா நலன்களும் தேவைப்படுகின்றன. கண்ணுக்குப் புலனாகாத பல பணிகள் மனிதனின் நல்வாழ்வுக்குத் தேவை. எனவே ராபின்சனின் கூற்றுப்படி பொருள்சாரா நலமும் அடங்கும் என்றும் தெரிகிறது.

நலம் பயக்கும் நடவடிக்கைகளை மட்டுமே பொருளாதாரத்தில் அடங்கும் என்பது பொருளாதாரத்தின் எல்லையைச் சுருக்குவதாகும். மதுபானம், குதிரைப் பந்தயம், சீட்டாடுதல் போன்ற

வற்றின் செலவினுல் மக்களுக்குப் பொதுவாக நல்வாழ்வு ஏற்படுவது இல்லை. பலரது வாழ்வு பாழாக ஓரிருவர் வாழ்வு மட்டும் மலருகிறது. ஆகவே இப் பொருட்கள் நல்வாழ்வுக்கு உகந்தவை அல்ல.

நலனை அளவிடுவது முடியாத காரியம். ஒரே விலையுடைய பொருள் பணக்காரனுக்கும் ஏழைக்கும் ஒரே அளவு நலம் பயப்பதன்று.

ராபின்சனின் வரையறை கிடைப் பருமையான, மாற்று வழிகளில் பயன்படக்கூடிய இயல்புகளோடுகூடிய உடைமைகளைக் கொண்டு விருப்பங்களை நிறைவேற்றிக்கொள்ள மனிதன் மேற்கொள்ளும் நடவடிக்கையை ஆராய்வது பொருளாதார இயல் எனப்படும்.

(i) மனித விருப்பங்கள் அளவற்றவை என்பதாலும்,

(ii) மனித விருப்பங்களை முழுதும் நிறைவேற்றப் போதிய அளவு சாதனங்கள் இல்லை என்பதாலும்,

(iii) சாதனங்கள் மாற்று வழிகளில் பயன்படக்கூடியவை என்பதாலும்,

(iv) விருப்பங்களின் முக்கியத்துவம் மாறும் தன்மையுடையதாலும் மேற்கூறிய பொருளாதார இயல் வரையறை நன்கு வலியுறுத்தப்படுகிறது. மனித விருப்பங்கள் அளவற்றவையாக இருப்பதால், ஒரு அட்சயபாத்திரமோ, அலாவுதீனின் அற்புத விளக்கோ இருந்தாலன்றி அவை பூர்த்தியாக்கப் படமாட்டாது.

சாதனங்கள் குறைவு, விருப்பங்கள் அதிகம் என்பதால் விருப்பங்களைத் தேர்வு செய்யவேண்டியுள்ளது. கல்லூரியில் நுழையும் மாணவன் கலைக்கல்வியா, மருத்துவக் கல்வியா, தொழிற் கல்வியா எது தேவை என்று தேர்வு செய்யவேண்டியுள்ளது. ஒரு நாட்டைப் பொருத்தவரை அதிக அளவு சாதனங்கள் தயாரிக்கப்படவேண்டுமா, அரிசி, கோதுமை போன்ற உணவு உற்பத்தி அதிகரிக்கப்படவேண்டுமா என்று தேர்வு செய்யப்படவேண்டியுள்ளது. ஆகவே பொருளாதாரத்தில் முக்கிய பங்கு வகிக்கின்ற 'தேர்வு' ஏற்படுவதற்கான காரணம் கிடைப் பருமையே (Scarcity) ஆகும். மேலும் தேர்வு என்பது பொருள் சார் தேர்வா அல்லது நலம்சார் தேர்வா என்று விளக்கிக் கூறல் வேண்டும்.

பொருளாதாரம் ஒரு முழு வளர்ச்சி பெற்ற ஓர் அறிவியல் என்று பலராலும் கருதப்படுகிறது. பொருளாதார விதிகள் விஞ்ஞான விதிகளிலிருந்து மாறுபட்ட இயல்புகளை உடையன. எல்லாப் பொளாதார விதிகளும் 'மற்ற நிபந்தனைகள் மாருதிருந்தால்' என்ற அடைமொழியுடன்தான் கூறப்படுகின்றன. எனவே எல்லா விதிகளும் எல்லா நிலைகளிலும் பொருந்தாது. மேலும் இவ் விதிகள் என்ன நடக்கலாம் என்று கூறுமே தவிர இதுதான் நடக்கும் என அரிதியிட்டுக் கூறமுடியாது. உதாரணமாக "விலை குறையும் சமயம், தேவை விரியும்" என்ற விதி மற்ற நிபந்தனைகள் மாருமலிருந்தால் பொருந்தும். மற்ற நிபந்தனைகளில் ஏதாவது ஒன்று மாறினாலும் இவ்விதி உண்மையாகாது. பொருளாதார விதிகள் திட்பம் குறைந்தனவாக இருப்பதற்கு இன்னொரு காரணம் அவை சோதனைகளால் ஆராயக்கூடியன அல்ல என்பதாகும்.

பொருளாதார இயலின் குறிக்கோள்

பொருளாதாரம் ஒரு இயல்புரையா (Positive Science) அல்லது நெறியுரையா (Normative Science) என்ற சந்தேகம் எழுகிறது. ராபின்ஸ் என்ற நிபுணர், பொளாதார இயல் வினாவுகளுக்கிடையே நடுநிலைமை வகிக்கும் இயலாகையால் நெறிகூர்வது தவறு எனக் கூறினர். அடிப்படைக் கருத்துக்களை விளக்குவதே பொருளாதாரத்தின் பணி என்றும், நெறியுரைத்தல் பொருளாதாரத்தின் நேரடி அலுவல் இல்லை என்றும் அவர் கருதினர். ஆனல் இன்றைய உலகிற்குப் பொருந்தும் வகையில் பொருளாதாரம் வேண்டுவன வகுக்கும் நெறியுரை அறிவியலாகவும், இருக்க வேண்டும். அப்போதுதான் பொருளாதார இயலின் முழுப் பயனையும் மக்கள் எய்துவர். எடுத்துக்காட்டாக வருமான வேற்றுமைக்கான காரணங்களை மட்டும் அலசும் இயலாக பொருளாதாரம் இல்லாமல் அவற்றைப் போக்க வழிவகுக்கும் நெறியுரையாகவும் இருத்தல்வேண்டும்.

பொருளாதாரமும் பிற இயல்களும்

பொருளாதாரம் சமூகத்தில் வாழும் மனித நடவடிக்கைகளைப் பயில்வதனல் சமூக இயல்களோடு தொடர்புடையதாகிறது. அரசியல், உளவியல், வரலாறு, சமூகஇயல், சட்டம், தத்துவம் போன்றவை பொருளாதாரத்துடன் அடிப்படைத் தொடர்பு கொண்டவையாகும். இதைத் தவிர புள்ளியியல், கணக்கியல் ஆகிய இயல்புகளும் பொருளாதாரத்தோடு தொடர்புடையன ஆகும்.

பொருளாதாரத்துக்கும் அரசியலுக்குமுள்ள தொடர்பு இன்று நேற்று ஏற்பட்டதல்ல. பெரும்பாலான அரசியல் முடிவுகள் பொருளாதார நிகழ்ச்சிகளின் அடிப்படையில் எழுபவை. போக்கு வரத்தை தேசிய மயமாக்குவதா, வரியின் அளவைக் கூட்டுவதா, குறைப்பதா, தடையில்லா வாணிபம் தேவையா போன்ற முடிவுகள் சிக்கல்கள் மிகுந்த பொருளாதாரப் பிரச்சினைகள். ஆயினும் அரசியல் அதிகாரம் படைத்தோர்கள் இப் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காண்கின்றனர்.

வரலாறும் பொருளாதாரமும் ஒன்றுக் கொன்று உதவுகின்றன. கடந்த காலப் பொருளாதார முன்னேற்றங்களைத் தெரிந்து கொள்ள சரித்திரம் உதவுகிறது. இந்தியப் புரட்சி, பிரெஞ்சுப் புரட்சி, ரஷ்யப் புரட்சி போன்ற வரலாற்று நிகழ்ச்சிகளைப் புரிந்து கொள்வதில் பொருளாதார அறிவு உறுதுணை புரிகிறது. இவை இரண்டிற்குமான தொடர்பைப் பற்றி சர். ஜான்ஸிலி என்பவர் கூறுகிறுர். ''வரலாறு இன்றி பொருளாதாரத்திற்கு அடிப்படை கிடையாது. பொருளாதார மின்றி வரலாறும் முழுமை அடைவதில்லை''.

பொருளாதார இயலுக்குக் கணக்கியலோடும், புள்ளியியலோடும் மிக நெருக்கமான தொடர்பு உள்ளது. ஜவான்ஸ், மென் கர், வால்ரா், எட்ஜ்வர்த், ஆர்.ஜி.டி. ஆலென், டின்ட்னெர், சாமிவேல்சன் முதலானுேர் கணக்கியல் அறிவைப் பயன்படுத்திப் பொருளாதார விளக்கங்களைத் துல்லியமாகக் கூறியுள்ளனர். ஆனுல் மார்ஷல் கணக்கியல் வழிப் பொருளாதாரம் ஆரய்ச்சியைப் புராட்டினுலும், கணிதத்தை அதிகமாக உபயோகிக்கவில்லை. தக்க முறையில் முடிவு எடுப்பதற்கு கணக்கியல் பரவலாக விளக்கிச் சொல்லப்படுகிறது. கணிதம் பொருளாதாரத்தில் கையாளப்படும் சிறப்பினுல் கணிதப் பொருளாதாரம் (Mathematical Economics) என்ற புதிய துறை தோன்றியுள்ளது. கிளார்க், ஸ்டிக்னர், சாமுவேல்சன் போன்ற கணிதப் பொருளாதார நிபுணர்கள் பொருளாதாரத்தில் கணிதத்தின் சிறப்பை மிகவும் விளக்கியுள்ளனர்.

அளவியல் பொருளாதாரம் (Econometrics) என்ற ஒரு புது இயல் சமீபத்தில் பிரபலமான ஒரு இயலாகும். இவ்வியலைக் கணிதம், புள்ளியியல், பொருளாதாரம் ஆகியவற்றின் கூட்டு எனலாம். அரசாங்கத்தாராலும், தனியாராலும் வெளியிடப்படும் புள்ளி விவரங்கள் பொருளாதார இயலின் செம்மைக்கு மிகவும் உதவுகின்றன. கணக்கியல் பொருளாதாரம் புள்ளியியலைத் தழுவி 'அளவியல் பொருளாதாரம்' ஆகிறது. பணத்தின் சுழல் வேகம்,

ஏற்றுமதி நெகிழ்ச்சி, வேலையாள் தேவை, வளைகோட்டின் சரிவு போன்ற கருத்துக்களைக் கணக்கிட்டு அறிய உதவுவது அளவியல் பொருளாதாரம் ஆகும்.

பொருளாதார இயல் படிப்பதன் நோக்கமும் பயன்களும்

நாடுகளின் வரலாற்றைப் புரட்டிப் பார்த்தால் வலிமை மிக்க நாடுகள் வாழ்வதும், வீழ்வதும் பொருளாதார நிலையின் எழுச்சி வீழ்ச்சியைப் பொறுத்தே உள்ளது என்று அறிய முடிகின்றது. அரசியல், மொழி, கலாசாரம், கல்வி, சமயம், சமூகம் முதலியன வளர செல்வம் தேவை. இதனால் தானோ என்னவோ திருவள்ளுவரும் 'பொருளில்லார்க்கு இவ்வுலகில்லை' என்று குறிப்பிட்டுள்ளார். செல்வம் படைத்த நாடு, செல்வாக்கு உள்ள நாடு, செல்வம் குறைந்த நாடு செல்வாக்கற்ற நாடு என்பதே உலக நியதி. மக்களாட்சி பெற்றுள்ள இந்த நாட்டில் மக்கள் சபை அங்கத்தினர்கள், சட்டமன்ற அங்கத்தினர்கள் பொருளாதார அறிவு பெற்றிருத்தல் அவசியம்.

மனிதன் எவ்விதம் பொருள் சேர்க்கிறான்; எவ்வாறு செலவு செய்கிறான் என்பனவற்றிற்கு விதிகள் அமைத்து மனித நலனில் அக்கறை கொண்ட இயலான பொருளாதாரம் அன்றாட வாழ்க்கைக்கு மிகவும் பயன்படுகிறது

பஞ்சம், வறுமை, வெள்ளம் முதலியவற்றின் மூல காரணங்களை ஆராய்ந்து அவற்றை நீக்குவதற்கு வழி வகுப்பது பொருளாதாரம். வரியைப் பற்றியும், உள் நாட்டு, வெளி நாட்டு வாணிகத்தைப் பற்றியும் அரசாங்க செலவினங்களைப் பற்றியும் இதன் மூலம் அறிந்து கொள்கிறோம்.

வணிகத்துறை, தொழில் துறை, பாங்குத் துறை, ஏற்றுமதித் துறை போன்றவற்றில் ஈடுபடுபவர்களுக்குப் பொருளாதார அறிவு பெரிதும் பயன்படுகிறது.

2. நுகர்ச்சி இயல்

(Consumption)

ஒரு பொருளை அல்லது பணியினை (Service) பயன்படுத்துவது, பொருளாதாரக் கோட்பாட்டின்படி, நுகர்ச்சி என்று கூறப்படுகிறது. ஒரு விருப்பத்தினைப் பூர்த்திசெய்ய ஒரு பொருள் தேவைப்படும். பசியினைப் போக்க உணவு தேவைப்படுகிறது. நோயினை தீர்க்க மருந்து அவசியமாகிறது. எனவே ஒரு பொருளின் பயனை நுகர்ச்சியியலின் அடிப்படையாகக் கொள்கிறோம். எவ்வாறேனும் ஒரு விதத்தில் பொருள் உபயோகிக்கப் படல்வேண்டும். ஒரு பொருளுக்கு விருப்பத்தினைப் பூர்த்திசெய்யும் சக்தி அமைந்திருக்கையில், அதனைப் பயன்படுத்திய பின்பு — அதாவது நுகர்ச்சிக்குப் பின் — அந்த சக்தியானது மறைந்துவிடுகிறது. எனவே, நுகர்ச்சியினை 'ஒரு பொருளின் பயனை அழித்தல்' (destruction of utility) என்ற பொருள்படக் கருதலாம். இதற்குரிய நிபந்தனையாவது, அப் பொருள் ஒரு தேவையினைப் பூர்த்தி செய்ததாக அமையவேண்டும்.

விருப்பத்தை பூர்த்தி செய்யாமலே ஒரு பொருளின் பயன் அழியுமெனில், அது நுகர்ச்சி ஆகாது. உதாரணமாக, ஒரு வீடு பற்றி எரிந்து நாசமாகும் நிலையில், நுகர்ச்சியானது அமைவதில்லை. எனவே மனிதர்களின் விருப்பங்களும் அவற்றைப் பூர்த்தி செய்தலும் இக் கோட்பாட்டின் முக்கியக் கூறுகளாகும். பொருளாதார நடைமுறையின் ஆணிவேர் நுகர்ச்சிக் கோட்பாடெனில் அது மிகையாகாது. விருப்பங்களே இல்லை எனில், எந்த முயற்சியும் எடுக்கவேண்டிய அவசியமே இன்றிப் போய்விடுகிறது. எனவே விருப்பங்கள் — முயற்சிகள் — திருப்தி (நிறைவு) செய்தல் (Wants — efforts — satisfaction) என்ற அமைப்பில் பொதுவான பொருளாதாரக் கோட்பாடு இருப்பதைக் காண்கிறோம். விருப்பம் எழுவதால், அதைப் பூர்த்திசெய்யப் பொருள்கள் தேவைப்படுகின்றன. அவற்றுக்கான ஊதியத்தை உழைப்பின்மூலம் பெற்று-

அதன்மூலம் தேவைகளைப் பூர்த்திசெய்து கொள்கிறோம். எனவே பொருளாதார இயக்கத்தின் ஆரம்பமும், முடிவும் நுகர்ச்சியே என்று அனுமானிக்கிறோம்.

மக்களின் நுகர்ச்சி இயல்புக்கு ஏற்ப, அவர்தம் வாழ்க்கைத் தரமானது அமையும். அத் தரத்தினுக்கு ஏற்ப, மக்களின் திறன் அமையும். அதற்கேற்ப ஒரு நாட்டின் பொருளாதார வளர்ச்சி அமைந்திருக்கும். எனவே இந் நுகர்ச்சியானது மிகமிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகக் கருதப்படுகின்றது. பொருள்களை உற்பத்தி செய்வதற்கான மூலகாரணமே நுகர்ச்சியின் அடிப்படையில் அமைந்திருக்கிறது. இதில் உள்ள பொதுவான விதிகள் வாழ்க்கையோடு ஒட்டிய நியதிகளைக் கூறுவதாக அமைவது குறிப்பிடத்தக்கது. பொருட்களின் (Goods) நுகர்வுப் பயன் விதியானது ஒரு பெரிய உண்மையினை விளக்குவதாகும். இதனை 'இறுதிநிலைப் பயன் விதி' என்பதாகப் பின்னொரு இடத்தில் கருதுவோம். மேலும், குடும்பங்களின் 'பட்ஜெட்' பற்றிய சில விதிகளை எர்னெஸ்ட் ஏன்ஜெல் (Earnest Engel) என்பார் நன்கு வரையறுத்துள்ளார். அவற்றின்மூலம் ஒருவனது நுகர்ச்சித் தன்மை நன்கு புலப்படுகிறது. பொதுவாக, பொருளாதார இயக்கமே 'அதிக அளவுத் தேவைகள்; குறைந்த அளவு சாதனங்கள்' என்ற மகத்தான உண்மையின் அடிப்படையில் இயங்கும். இதில், நாம் பயன்படுத்தும் பொருள்களாவன நமக்கு அதிக அளவு பயனைத் தரத்தக்க விதத்தில் அமைதல் அவசியம்.

நுகர்ச்சி இயலில், இரண்டு வகையான கோட்பாடுகள் உள்ளன. முதலில் ஆல்ஃப்ரட் மார்ஷல் (Alfred marshall) வரையறுத்த விதிமுறைகளைக் கருதுகிறோம். அதன்பின், தற்காலத்தில் மிகவும் பயன்படுத்தப்படும் ஹிக்ஸ் (Hicks) என்பாரது 'சம பயன் விளைவு விதிகள்' என்ற கருத்தினை விரிவாகக் கருதுகிறோம்.

மனித இனத்தின் விருப்பங்களும் அவற்றைப் பூர்த்திசெய்தலும் (Human wants and their satisfaction)

ஆசையற்ற மனிதன் உலகில் இல்லை என்றும் உண்மையின் அடிப்படையில், பொருளாதாரத்தில் மனிதர்களது விருப்பங்களையும் அவற்றின் விசித்திரத் தன்மைகளையும் விரிவாக ஆய்கிறோம். தேவைகளை பூர்த்திசெய்யும் பொருட்டே, பொருளாதார நடவடிக்கைகள் எடுக்கப்படுகின்றன. உற்பத்தி, அளிப்பு, பண்டமாற்று ஆகியவை விருப்பங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டவையே ஆகும்.

சில தேவைகள் அடிப்படையானவை ஆகும். பசியெடுத்தல், உறைவிடம் தேடல் போன்றவை மிகவும் அடிப்படையானவை ஆகும். ஆனுல் பண்பாடு, நாகரிகம் இவற்றின் வளர்ச்சிக்கு ஏற்ப விருப்பங்களும் பலவாருகப் பெருகுவதைக் காண்கிரேம். உயர்ந்த வகைப் பொருட்களைப் பயன்படுத்திச் சமூகத்தில் தனி இடம் வகிக்க ஒவ்வொருவனும் விழைகிருன். போட்டி மனப்பான்மை அதிகரிக்கையில், 'ஆசைக்கோர் அளவில்லை' என்றநிலை ஏற்படுகிறது! சமூக நிலைக்கு ஏற்ப, இடத்தின் சூழ்நிலைக்கு ஏற்ப நாம் சில தேவைகளைப் பூர்த்தி செய்யவேண்டிய நிலை ஏற்படுகிறது. சில சமுதாய நடைமுறைகளைக் கடைப்பிக்க வேண்டியுள்ளது. சில பொருட்களுக்கு உள்ள விளம்பரத்தின்மூலம், கவர்ச்சியின் மூலம், நாம் அவற்றை வாங்கிப் பயன்படுத்த மனம் விழைகிறது. நம்மை மற்றவர் நன்கு அறிய, சிலவற்றை விரும்புகிரேம். மாறுதலுக்குச் சில விரும்பப்படுகின்றன (Varietv). பாதுகாப்புக்குச் சில தேவைப்படுகின்றன (Security). எதிர் வினைவுக்குச் சில அவசியமாகக் கருதப்படுகின்றன (response). எல்லா விருப்பங்களையும் இந்த வட்டத்தினுள் அமைவதாகக் கருதலாம்.

இனி பல்வேறு விருப்பங்களின் இயல்புகளை (Characteristics) விரிவாகக் கருதுவோம்:

விருப்பங்கள் அனைத்தும் ஒரு எண்ணிக்கையில் அடங்குவதில்லை. அவை கணக்கற்றவையாகும். மனிதன் விரும்புவதற்கு ஒரு அளவே இல்லை எனலாம். ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில், ஒருவன் சில பண்டங்களையே விரும்புகிருன். அவை பூர்த்தி செய்யப்பட்டபின். மற்ற விருப்பங்கள் எழுகின்றன. பூர்த்தி (நிறைவு) செய்யப்படுவதற்கு விருப்பமே இல்லை எனில், மனித வாழ்வுக்கே அர்த்தம் இருப்பதில்லை.

விருப்பங்கள் எண்ணற்றவையாக இருப்பினும், ஏதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட விருப்பமானது பூர்த்தி (நிறைவு) செய்யப்படும் தன்மையுடையதாகும். ஒருவனுக்கு ஒரு கைக் கடியாரம் தேவைப்படின், அந்த விருப்பமானது உடனே பூர்த்தி செய்யப்படுகிறது. இந்த இயல்பின் அடிப்படையில், ஒரு முக்கியமான பொருளாதாரக் கோட்பாடானது பெறப்படுகிறது. அது 'குறைந்து செல் இறுதிநிலைப் பயன் விதி' என்று கூறப்படுகிறது. ஒரு பொருளைத் தொடர்ந்து அதிக அளவில் பயன்படுத்துகையில், ஒவ்வொரு நிலையிலும் அதன்மூலம் பெறப்படும் அதிகப்படி பயன் படிப்படியாகக் குறைந்து செல்லும் என்பதே இவ்விதியாகும். குறிப்பிட்ட ஒவ்வொரு விருப்பமும் பூர்த்தி செய்யப்படும் தன்மை உடையது

என்ற உண்மையினை அடிப்படையாகக் கொண்டு இவ் விதியானது வரையறுக்கப்படுகிறது.

விருப்பங்களில் பல ஒன்றோடொன்று இணைந்தனவாகக் காணப்படுகின்றன. அதாவது, ஒரு விருப்பத்தின் (complementary) பூர்த்தியானது மற்றொன்றினையும் நிறைவு செய்வதாய் அமையும். உதாரணமாக, எழுதுகோல் (pen) வாங்குகையில், மசியும் (ink) உடன் வாங்கப்படும். இதுபோன்ற இணைப்புப் பொருட்கள் தேவைக் கோட்பாட்டில் அதிகமாகக் காணப்படுகின்றன.

விருப்பங்கள் ஒன்றோடொன்று போட்டியிடும் (competitive) தன்மையனவாகும். அவற்றைப் பூர்த்தி செய்யும் பொருட்களை நம் விருப்பம்போல் பயன்படுத்துகிறோம். குறைந்த அளவு பணம் நம்மிடம் இருக்கையில், தேவைகள் பலவாகக் காணப்படுகின்றன. அவற்றுள் சிலவற்றைத் தெரிவு செய்து பூர்த்தி செய்கிறோம். சாதனங்கள் குறைந்த அளவில் இருப்பதால், மிகவும் முக்கியமான இன்றியமையாத தேவைகளைத் தேர்ந்தெடுத்து, அவற்றை மட்டும் பூர்த்தி செய்யவேண்டிய நிலையில் நாம் இருக்கிறோம். எனவே, அவரவர் வசதிக் கேற்ப, தேவைப் பூர்த்தி நிலையும் அமைகின்றது.

விருப்பங்கள் ஒரு வகையில் இல்லாமல், பல வழிகளிலும் நிறைவு செய்யப்படும் தன்மை வாய்ந்தன் மாற்றுத் தன்மை (alternatives) ஆகும். குறிப்பிட்ட எந்த ஒரு விருப்பமும் பல வழிகளில் பூர்த்தி செய்யப்படலாம். உதாரணமாக, பசித்த ஒருவன் பலவகைப்பட்ட உணவு வகைகளின் மூலம் அதனை நிறைவு செய்ய வாய்ப்பு உண்டு. அவரவர் சக்திக்கு ஏற்ற வழியினைக் கையாளலாம்.

சில விருப்பங்கள் நாளடைவில் பழக்கமாகி (habits) விடுவதைக் காண்கிறோம். அடிக்கடி சில தேவைகளைப் பூர்த்தி செய்யும் நிலையில், அப் பழக்கத்துக்கு மனிதன் விரைவில் அடிமையாகி விடுவதைக் காணலாம். உதாரணமாக, தொடர்ந்து மது அருந்தும் ஒருவன், நாளடைவில் குடிப் பழக்கத்துக்கு ஆளாகி விடுவதைப் பார்க்கிறோம். அவன் இயல்பான நிலையில் இருக்கவேண்டுமெனில், அது இன்றியமையாத ஒன்றாகவும் ஆகிவிடுகிறது.

எனவே, பொருளாதாரக் கோட்பாட்டின் அடிப்படையாய் அமையும் இவ் விருப்பங்களின் மேற் கூறப்பட்ட சிறப்பான இயல்புகள் மூலம் சிலவகை நியதிகளும், விதிகளும் வரையறுக்கப் படுவதைக் காண்கிறோம். தேவை இல்லையெனில், மற்றச் செயல்கள்

எதுவுமே நடைபெறுவதில்லை. பொருளாதார இயல்புகட்கு 'விருப்பங்கள்' மற்றும் அவற்றின் இயல்புகள் மிகவும் இன்றியமையாதனவாகும்.

பொருளின் பயன் (Utility) ஒரு சிறு விளக்கம் : பொருளாதாரக் கோட்பாட்டின்படி, 'பயன்' என்ற கருத்தானது, ஒரு பொருளினது, 'விருப்பத்தினைப் பூர்த்தி செய்யும் சக்தி' (want satisfying power) என்று வரையறுக்கப்படுகின்றது. இது ஒரு இயல்பினை (quality) குறிப்பிடுகிறது. இந்தப் பயன் காரணமாக விளைவதை 'திருப்தி' (satisfacion) என்கிறோம். பொருளின் உபயோகமானது இக் கருத்தினின்று மாறுபட்ட ஒன்று. உதாரணமாக, தீங்கு விளைவிக்கும் மது வகைகள் (liquor), விருப்பத்தை நிறைவேற்றும் தன்மை பெற்றிருப்பதால், பொருளாதார பண்டங்களாக அமைகின்றன. பொருளினை நுகர்வோரைப் பொறுத்து, (subjective), இடத்தினைப் பொறுத்து, உபயோகிக்கும் காலத்தினைப் பொறுத்து, பொருளானது பயன்படும் வடிவத்தைப் பொறுத்து, ஒவ்வொரு பொருளின் பயனும் (util ty) அமைந்திருக்கக் காணலாம். இதை ஒரு குறிப்பிட்ட முறைப்படி அளவிட இயலுவதில்லை. உதாரணமாக, புகை பிடிப்போருக்கு, சிகரெட்டுகள் அதிகப் பயன் அளிப்பனவாய் அமையும். ஆனால், உத்தேசமாக, பயனை நிர்ணயிக்க நம்மால் இயலும். பொருளுக்கு கொடுக்கப்படும் விலை மதிப்பை அதனது பயன் மதிப்பாகக் கொள்ளலாம். இது ஆல்ஃப்ரட் மார்ஷலின் அனுமானமாகும். பொருட்களின் பயனைப் பற்றிய ஒரு பொதுவான விதி முறையினைப் பின் வருமாறு வரையறுக்கிறோம்.

குறைந்துசெல இறுதிநிலைப் பயன் விதி (Law of Diminishing Marginal Utility)

மனித இனத்தின் விருப்பங்கள் (wants) பூர்த்தி செய்யப்படுவதானது ஒரு சில நியதிகட்கு உட்பட்டதாக அமைவதைக் காணலாம். அவற்றுள் ஒன்றுதான் இந்த விதியாகும். இவ்விதி, நமது சொந்த அனுபவத்தின் அடிப்படையிலும், மற்றவர்களின் நட்புக்கு ஏற்பவும் பெறப்பட்ட பொதுமையேயாகும். 'எந்த ஒரு விருப்பமும் பூர்த்தி செய்யப்படும்' என்ற உண்மையின் அடிப்படையில் இவ்விதி வரையப்படுகிறது. இதனை அளித்தவர் ஆல்ஃப்ரட் மார்ஷல் (Alfred Marahall) ஆவர். இது ஒரு எளிய விதியேயாகும். உதாரணமாக, ஒருவர் தொடர்ந்து ஆப்பிள் பழங்களை ஒவ்வொன்றாக சாப்பிடுவதாகக் கொள்வோம். முதல் பழத்தை சாப்பிடுகையில், அதிக அளவு பயன் இருப்பதாக உணர்வார்; இரண்டாவதில், முன்னதைவிட குறைந்த அளவு

திருப்தியே இருக்கும். இப்படியாக, பண்டத்தின் அளவு படிப் படியாக—ஒன்று ஒன்ருக—அதிகரித்துச் செல்கையில், அதிலிருந்து பெறும் திருப்தி அளவும் படிப்படியாக குறைகிறது. இறுதியில் விருப்புமாறி, வெறுப்பு ஏற்படும் சூழ்நிலை காணப்படுகிறது. எனவே, ஒரு பொருளை தொடர்ந்து பயன்படுத்துகையில் அதிலிருந்து கிடைக்கும் அதிகப்படி பயன் தொடர்ந்து குறைகிறது என்பதே இந்த நியதியின் சாராம்சமாகும்.

மார்ஷலின் வரையறை

"மற்றக் காரணங்கள் மாருதிருக்கையில், ஒரு பண்டத்தின் குறிப்பிட்ட அளவிலிருந்து ஒருவன் அதிகப்படியாகப் பயன் படுத்தும் பண்ட அளவின் மூலம் பெறும் அதிகப்படி (உபரி) நன்மையானது படிப்படியாகக் குறைந்து செல்கிறது. மொத்தப் பயன் அதிகரிக்கிறது (குறைந்த வீதத்தில்)".

அவர் குறிப்பிடுவது இறுதிநிலைப் பயனின் (marginal utility) தன்மையை என்பது குறிப்பிடத் தக்கது.

மொத்தப் பயனின் அதிகரிப்பு வீதத்தினை (total utility), இறுதிநிலைப் பயன் காட்டுகிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட அளவில், இறுதி நிலையில் ஏற்படும் விளைவை இது காட்டும். கணித அடிப்படையில் இறுதிநிலைப் பயனுனது தொடர்ந்த இரு மொத்தப் பயன் அளவு களிடையே உள்ள வேறுபாடாக மதிப்படப்படுகிறது. அதாவது, n அளவு ஒரு பொருள் பயன்படுத்தப்படுகையில் ஏற்படும் மொத்த பயன் T_n எனவும், $(n+1)$ அளவு அது பயன்படுத்தப் படுகையில் மொத்தப் பயன் T_{n+1} எனவும் இருப்பின், $(n+1)$ என்ற நிலையில் உள்ள இறுதி நிலைப் பயன் மதிப்பு $T_{n+1} - T_n$ என்பதாகும். இந்த விதியினைப் பின்வரும் (கற்பனை) உதாரணத்தின் மூலம் விளக்கலாம்.

பின்வரும் பட்டியலைக் காண்க :

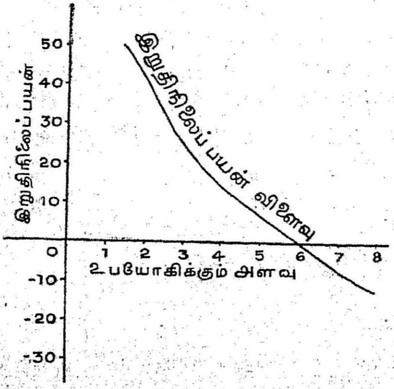
ஆப்பிள் அளவு	மொத்தப் பயன் (திருப்தி அளவு)	இறுதிநிலைப் பயன் (திருப்தி அளவு)
1	50	50
2	90	40
3	110	20
4	120	10
5	125	5
6	125	0
7	115	−10
8	100	−15

ஒரு அதிகப்படியான அளவு எடுத்துக் கொள்ளப் படுகையில், தொடர்ந்து அதிகப்படி திருப்தி, அளவில் குறைகிறது. 6-வது ஆப்பிள் வாங்கப்படுகையில் அதிகப்படி பயன் பூஜ்யமாகிறது; அதன் பின் எதிர்க் கணிய மதிப்பாகிறது. எனவே இறுதி நிலைப் பயன் தொடர்ந்து குறைந்து செல்லக் காண்கிறோம். பூஜ்ய நிலையில் 'உச்ச நிலை' ஏற்படுவதாகக் கொள்ளலாம்.

ஆனால் மொத்தப் பயன் அளவில் அதிகரித்துச் செல்கிறது. ஆனால் இந்த அதிகரிப்பானது குறைந்த வீதத்தில் என்பது காணத் தக்கது. 2-வது அளவில், 40 அதிகம் எனில், 3-வது அளவில் 20 எனக் குறைந்துவிடுகிறது. 'குறையும் வீத அதிகரிப்பு' என்று இதனைக் குறிப்பிடுகிறோம். அதாவது, ஒரு பொருள் நம்மிடம் மிகுதியாக இருக்கையில், அதைவிட அதிகமான அளவு பெறுவதை நாம் விரும்புவதில்லை என்பது புலப்படும்.

இந்த தன்மையினைப் பின்வரும் விளக்கப்படம் நன்கு புலப் படுத்தும் :

பயன்படுத்தப்படும் பண்ட அளவு கிடை அச்சிலும், அதன் மூலம் கிட்டும் இறுதிநிலைப் பயன் நிலைக்குத்து அச்சிலும் கருதப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு புள்ளியையும் குறித்து, அவை அனைத்தையும் இணைக்கையில் கிடைக்கும் சாய்வான கோடானது கீழ் நோக்கிச் சரிந்திருக்கும். இறுதிநிலைப் பயன் பூஜ்யமாக அமையும் நிலையில் மொத்தப் பயன் நிலையானதான உச்சநிலை (maximum) மதிப்பை அடைவது குறிப்பிடத் தக்கதாகும். (சார்பானது மாறிலியாக அமைந்தால், அதன் வகை வேறுபாட்டுக் கெழு பூஜ்யமாகும் என்பது கோட்பாடு.)



படம் 1

இந்த விதியானது பின்வரும் சில முக்கிய நிபந்தனைகட்கு (limitations) கட்டுப்பட்டு செயல்படும்.

பொருளின் அளவானது நியாயமான அலகுகள் அதிகரிக்கப் படல் வேண்டும். உதாரணமாக, தாகத்தில் தவிப்பவனுக்குத் துளித் துளியாகத் தண்ணீர் அளித்தால், பயன் அதிகரித்துச்

செல்லுமேயன்றி, குறையாது. எனவே பொருளின் அளவு சரியான ஒன்ருக அமைதல் வேண்டும்.

பயன்படுத்தப்படும் பொருளானது ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் கருதப்படல் வேண்டும். முதலாம் அளவிற்கும், இரண்டாம் அளவிற்கும் இடையே கால இடைவெளி இருத்தல் கூடாது. அதாவது, காலையில் சாப்பிடும் ஒருவனுக்கு, பகலில் மீண்டும் சாப்பிடும்போது இறுதி நிலைப் பயன் அதிகரிக்கவே செய்யும்.

நுகர்வோரது குணம் மாறுபடாது இருத்தல் வேண்டும். பணத்தைச் செலவழிக்காத கருமியிடம் மேலும் மேலும் பணம் வர வர, அவனது ஆசை அதிகரிக்கிறது. குடிகாரனுக்கு மேலும் மேலும் கோப்பையில் மது அளிக்கப்படுகையில் அவனது ஆவலும் அதிகமாகும்.

அபூர்வமான பொருட்களைச் சேகரித்தலில் இவ்விதி செயல்படுவதில்லை. தபால் தலைகள், நாணயங்கள் முதலியவற்றைச் சேகரிக்கும் பலருக்கு இறுதிநிலைப் பயனானது ஒவ்வொரு அளவுடனும் அதிகரித்தே செல்லும் தன்மையது.

மற்றவரது, பயன்படுத்தப்பட்ட பண்ட அளவின் மாறுதலுக்கேற்ப ஒருவரது இறுதிநிலைப் பயன் மாறலாம். உதாரணமாக, போட்டிக்கு தபால் தலை சேகரிக்கும் மற்றொருவரின் பண்டம் காணமல் போய்விட்டதெனில், முதலாம் நுகர்வோரது சேகரிப்பு அதிக மதிப்புடையதாய் ஆகிறது.

எனவே இந்த விதி, மேற்கூறிய காரணங்கள் யாவும் கட்டுப்பட்ட நிலையிலேயே செயல்படும் வலிமையுள்ளது.

இறுதிநிலைப் பயன்

பயன்படுத்தப்படும் பொருளின் ஒரு அலகு (one-unit) அதிகரிப்புக்கு இணையாக அதன் மொத்தப் பயனில் ஏற்படும் மாறுதல் இறுதிநிலைப் பயனாகக் கருதப்படும். பொருளை வாங்குகையில், நுகர்வோனானவன் அப் பொருளின் விலையை அதன்மூலம் பெறப்படும் பயனோடு ஒப்பிடுகிறான். இறுதிநிலைப் பயன், பொருளின் விலையோடு சமமாகும் நிலைவரையில் அப்பொருளின் நுகர்ச்சி அதிகரிக்கும். அதாவது, பொருளின் விலையைவிட அதிகமாக அப்பொருளின் இறுதிநிலைப் பயன் அமைவதை அவன் விரும்புகிறான். கொடுக்கப்பட்ட பட்டியலில், பொருளின்விலை 5 பைசாக்கள் என்று அமையும் நிலையில் — அதாவது 6-வது ஆப்பிள் அளவில்

- அவன் வாங்குவது நிறுத்தப்படும். (பயனானது பைசாக்களாக மதிப்பிடப்படுவதாகக் கொள்க). அதற்குமேல், அவன் வாங்குவதற்கு முயலவில்லை. எனவே, இங்கு விலையானது இறுதிநிலைப் பயனுக்குச் சமமானதாக அமைகிறது. இந்த நிலையில், அப் பொருளை வாங்குவது தகும் என அவன் கருதுகிறான். இந்த இறுதி நிலையானது மாறக்கூடிய தன்மையுடையதாகும்.

பணத்துடன் தொடர்பு படுத்துகையில், மேலும் மேலும் அதிக அளவில் ஒருவனுக்குப் பணம் கிடைக்கையில், அதன் மூலம் அவன் அடையும் இறுதிநிலைப் பயன் தொடர்ந்து குறையும் என அறியலாம். பணக்காரர்களுக்கு இந்த 'அதிகப்படி' பணத்தின் 'மதிப்பு' குறைந்தே காணப்படும். இங்கு குறைந்து செல் இறுதி நிலைப் பயன் விதி நன்கு செயல்படுகிறது.

இறுதிநிலைப் பயனானது பொருளின் விலையைத் தீர்மானிக்க வல்லது என்றும் கூறலாம். எனவே, இறுதிநிலைப் பயன் விலைக்குச் சமமான நிலையில், அதன்விலை நிர்ணயிக்கப்படுவதாகக் கூறலாம். விலை மாறுபடுகையில், பொருளின் இறுதிநிலைப் பயன் அளவும் மாறத்தக்கது. பொருள் அதிக அளவில் கிடைக்கும் நிலையில், இறுதிநிலைப் பயன் குறையும்.

நடைமுறை வாழ்வில் இவ்விதியின் முக்கியத்துவம்

பணக் கோட்பாட்டில் இவ்விதி முக்கிய அங்கம் வகிப்பதால், வரி விதிப்புக் கொள்கையானது இதன் அடிப்படையில் நிர்ணயிக்கப்படுவதாகக் கூறுகிறோம். பணக்காரர்கட்கு அதிக அளவில் வரி விதிக்கப்படுவது இதன் மூலமே பொதுப் பொருளாதாரத்தில் இது ஒரு முக்கியமான கோட்பாடாகும். வருமானம் அதிகரிக்கையில், உயர்ந்த வீதத்தில் வரி விதிக்கப்படும்.

ஒரு பொருளின் அளிப்பு அதிகரிக்கையில், அதன் மதிப்பு குறைகிறது என்பது இவ்விதியால் வலியுறுத்தப்படுகிறது. எனவே மதிப்புக் கோட்பாட்டில் (theory of value) இது செயல்படுகிறது. தொழில் நிறுவனங்கட்கு இது மிகவும் உதவக்கூடிய ஒன்று.

தேவை வளைவுகள் கீழ்நோக்கி சரிவதன் காரணம் இவ்விதியினின்றும் பெறப்படும். எனவே தேவை விதியானது இதன் அடிப்படையில் பெறப்பட்ட ஒன்றாகும்.

பணம் படைத்தோர்க்கு அதிகப்படி பணத்தின் அளவு குறைந்த பயனை அளிப்பதாக அமைவதால், பொருளாதார சம

அளவுப் பங்கீடு என்ற கருத்தை வலியுறுத்த இவ்விதி மிகவும் பயன்படும்.

நுகர்வு என்றால் என்ன? இறுதிநிலை குறைபயன்பாட்டு விதியினை கணித வாயிலாக விவரித்து அதன் குறைபாடுகளையும் ஆராய்க. [சென்னை; ஏப்ரல்'72]

குறைந்து செல் இறுதிநிலைப் பயன்விதியை விளக்கி வரைக. நவீனப் பொருளாதாரப் பகுப்பாய்வுகள் அது எவ்வாறு பயன் படுகிறது? [சென்னை; ஏப்ரல் '67]

3. தேவையும் அளிப்பும்

(Demand and Supply)

முதலில் தேவையையும் தேவை நியதிகளையும் கவனிப்போம்.

தேவை என்பது "பொருளாதாரத்தில் வாங்கும் சக்தியால் உந்தப்பட்டதும் விலை கொடுக்க உடன்பட்டதுமான விருப்பங்களே" யாகும் என்று விளக்கப்படுகிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில், குறிப்பிட்டதொரு விலையில் ஒரு பொருள் (பண்டம்) எவ்வளவு வாங்கப்படுமோ அதுதான் அப்பொருளின் தேவையாகும். விலை குறிப்பிடப்படவில்லை என்றால், 'தேவை' என்ற சொல்லிற்கே பொருள் இல்லை. மேலும் விருப்பமோ ஆசையோ மட்டும் தேவையாகிவிடாது. விருப்பையும், ஆசையையும் மனநிறைவு படுத்துவதற்கான பணமும் பண சக்தியும் இல்லையென்றால், அவ்விருப்பமோ, ஆசையோ தேவையாகாது. ஆல்ஃபிரெட் மார்ஷல் கூற்றுப்படி "மற்ற நிலைமைகள் மாறாதிருக்கும்போது அதிக அளவு பொருள்களை விற்பனை செய்ய அவற்றைக் குறைந்த விலையில் அளிக்க வேண்டும்; ஏனெனில் விலை இறக்கத்தில் தேவை விரிந்தும், விலை ஏற்றத்தில் தேவை சுருங்கியும் காணப்படுகிறது".

தேவை வளைகோடுகள் (Demand Curves)

ஒரு குறிப்பிட்ட பொருள் தேவைப்படும் அளவு அதன் விலை, மற்ற பொருள்களின் விலைகள், வாங்கும் காலம் இவற்றிற்கான தொடர்புகளை, 'தேவை வளைகோடு (demand curve)' எடுத்துக் காட்டுகிறது. தேவைப்படும் பொருளின் அளவு x அலகுகள் என்றும் ஒவ்வொரு அலகுக்குமான விலை p (ரூபாய்) என்றும் கொள்வோம்.

இப்போது x-க்கும் p-க்கும் உள்ள தொடர்பைக் கீழ்க்கண்ட விதங்களில் எழுதுகிறோம்.

$$p = f(x); \quad x = g(p); \quad \phi(x, p) = 0 \qquad (1 \cdot 1)$$

மார்ஷல் குறிப்பிட்டதைப் போல, வரைபடத்தில் இதை விளக்கு வதற்கு x மாறியை கிடை அச்சிலும் (horizontal axis), p மாறியை செங்குத்து அச்சிலும் (vertical axis) அளந்து கணக்கிடுவோம். இங்கு x ஒரு சார்பற்ற மாறி; p ஒரு சார்புடைய மாறியாகிறது. x, p-ன் தொடர்பு $p = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் தெரிகிறது. கணிதப் பொருளாதார வல்லுநர் A. A. கூர்னோ (Cournot) என்பவர் $x = g(p)$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கையாளுகின்றார்.

$p = f(x)$-க்கான சமன்பாட்டில், x-க்குச் சரியான p-ன் மதிப்பைக் கண்டு அறிந்தபின், $x = \phi(p)$ என்ற சமன்பாடு எழுதப்படுகிறது. இங்கு f-ம், g-ம் இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று தலைகீழ்ச் சமன்பாடுகள் (inverse functions).

$\phi(x, p) = 0$ என்ற சார்பலனில் எது சார்பற்ற மாறி, எது சார்புடைய மாறி என்று திட்டவட்டமாகக் கூற முடியாது. எனவே இதை ஒரு உட்படு சார்பலன் (implicit function) எனக் கூறலாம். இந்த மூன்று வகைகளில், எந்த ஒரு வகையையும் ஒரு 'தேவை நியதி' அல்லது 'தேவை விதி' (Demand law) என்றும் கூறுகிறோம்.

x_D என்று குறித்தால் தேவைப்படும் x-ன் அளவு என்று தெரிய வரும். ஏனெனில் x_S என்ற மதிப்பு அளிக்கப்படும் x-ன் அளவைக் குறிப்பதால் (amount of supplied), கீழ்க் குறி உபயோகிக்கப் படுகின்றது.

நுகர்வோரிடையே ஒரு முழுமையான (நிறைவான) போட்டி இருப்பதாக அனுமானித்து, அதன்படி தேவை நியதிகள் கணிக்கப் படுகின்றன. எனவே ஒவ்வொரு துய்ப்போரும் (நுகர்வோரும்) தான் வாங்கும் பொருளின் அளவை நிர்ணயிக்கின்றார். வாங்கும் பொருளின் விலை, மற்ற பொருட்களின் விலைகள் இவற்றை அனுசரித்து அந்த வாங்கும் அளவு தீர்மானிக்கப்படுகிறது. ஆகவே x, p மாறிகளுக்கு, அதன் மூலம் f, g சார்பலன்களுக்குச் சில நிலையான (மாறுத) நம்பகமான நிபந்தனைகள் வகுக்கப்படு கின்றன. அப்போதுதான் தேவை நியதிகள் ஒரு இயல்பான பொருளாதார நிலைமையில் (normal economic situation) இருக்கும்.

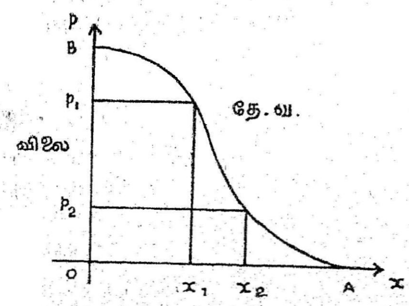
1. x, p இருமாறிகளும் பூஜ்யம் அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மதிப்புகளாக (நேர் மதிப்புகளாக) (positive) இருக்கவேண்டும். அவை எதிர்மறை மதிப்புக்களாக இருக்கக்கூடாது $0 \leqslant x \leqslant A$

$0 \leqslant p \leqslant B$ என்ருல் இங்கு A, B என்பன முடிவுடைய எண்கள். இவ் விடைவெளிகளில் இம்மாறிகள் எந்த மதிப்பையும் எடுத்துக் கொள்ளும். மேலும் அவை தொடர் மாறிகள். இந்த அனுமானங்கள் கீழே சொல்லப்போகும் மற்றவைகளைவிட அவ்வளவு சக்தி வாய்ந்தவையல்ல.

2. இந்த தேவை நியதியில் காணப்படும் இருமாறிகளும் ஒன்றுக்கொன்று ஒத்தியைபு உடையவை: (one to one crrespondance), ஏனெனில் ஒரு x மதிப்புக்குச் சரியான ஒரே ஒரு p மதிப்பும், அதேபோல ஒரு p மதிப்புக்குச் சரியான ஒரே ஒரு x மதிப்பும் இருப்பதைக் காண்கிறேம்.

3. p ஒரு நிலை எண் என்ற ஒரு அசாதாரண நிலையைத் தவிர, மற்ற எப்போதும், தேவையானது 'விலை'யின் ஒரு "ஒரே முறை இறங்கும் சார்பலன்" (monotonically decreasing function) அதாவது விலை கூடினுல் தேவை குறையும். உதாரணமாக x_1, x_2 இரு தேவைகளின் விலைகள் முறையே p_1, p_2 என்ருல், $p_2 < p_1$ என்ருல் மட்டுமே, $x_2 > x_1$ ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, $p = \sqrt{(9 - x)}$ என்ற தேவைச் சமன்பாட்டைக் காண்போம்.

அதாவது, $x = 9 - p^2$



படம் 2.

மெய்யான, நேர் எண்ணுக p இருக்க, x-ன் எல்லை $0 \leqslant x \leqslant 9$ ஆகும். x நேர் எண்ணுக இருப்பதற்கு p-ன் எல்லை $0 \leqslant p \leqslant 3$ ஆகும். x-ன் இந்த எல்லையில் ஒவ்வொரு x மதிப்பிற்கும் ஒரே ஒரு p மதிப்பு தான் உள்ளது. அதே போல ஒவ்வொரு p மதிப்பிற்கும் ஒரே ஒரு x மதிப்பு மட்டுமே இருப்பதைக் கீழ்க்கண்ட படம் மூலம் காண்கிறேம்.

இங்கு p கூடக்கூட x குறைகிறது. x கூடக்கூட p குறைகிறது. ஒரு பொருள் இலவசம் என்ருல், $p = 0$ என்ருல், தேவை x_D மிக அதிகமாக இருக்கும். p மிக அதிகமாகும்போது x_D பூஜ்யத்தை நெருங்கும்.

அளிப்பு வளைகோடுகள் (Supply curves)

ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளுக்கான ஒரு அளிப்பு வளைகோட்டை இப்போது கவனிப்போம். இங்கு உற்பத்தியாளர்களால் சந்தையில் அளிக்கப்படும் பொருளின் அளவு x, அப் பொருளின் விலை p இரண்டுமே இங்கு மாறிகள். அளிப்புத் தொடர்பை

$$p = F(x);\ x = G(p);\ \phi(x, p) = 0 \qquad (1.2)$$

என்று மூன்று விதங்களில் குறிக்கிறோம்.

F, G இரண்டும் தலைகீழ்ச் சார்பலன்கள் உற்பத்தியாளர்களிடையே ஒரு முழுமைப் போட்டி இருக்கிறது என்ற அனுமானத்தில் அளிப்பு விதிகளைக் கணிக்கலாம். விலையையொட்டி, ஒவ்வொரு உற்பத்தியாளரும், எந்த அளவு பொருளை உற்பத்தி செய்யலாம் என்பதை நிர்ணயிக்கிறார். x, p மாறிகளுக்கு, அதன் மூலம் F, G சார்பலன்களுக்கு சில நிலைத்த நம்பகமான நிபந்தனைகளை வரையறுத்து, இயல்பான பொருளாதார நிலைமையில், அளிப்பு நியதிகள் விளக்கப்படுகின்றன.

1. சில குறிக்கப்பட்ட இடைவெளிகளில், x, p மாறிகள் நேர் மதிப்புகளை மட்டும் எடுத்துக்கொள்ளும். இம் மாறிகள் தொடர் மாறிகளாகும்.

2. அளிப்பு நியதியின் இரு மாறிகளும் ஒன்றுக்கொன்று ஒத்தியைபு உடையவையாக இருக்கவேண்டும்.

3. விலை, நிலையெண்ணாக இல்லாதபோது, விலையானது அளிக்கப்படும் பொருளின் அளவினுடைய ஒரேயொரு முறை ஏறும் சார்பலன் ஆகிறது. அதாவது p கூடக்கூட, x-ம் கூடும். x_1, x_2 இரு அளவுகளில் விலைகள் முறையே p_1, p_2 என்றால், $p_2 > p_1$ என்றால், மட்டுமே $x_2 > x_1$ ஆகிறது. எடுத்துக்காட்டாக,

$p = 2 + \frac{x^2}{8}$ என்ற அளிப்புச் சார்பலனைக் கவனிப்போம்.

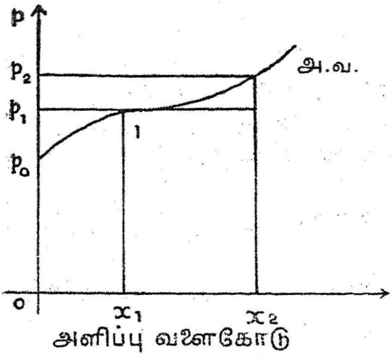
$p = 2 + \frac{x^2}{8}\ (x \geqslant 0)$ என்பதை

$x = \sqrt{8p - 16}$ என்றும்

$x^2 - 8p + 16 = 0$ என்றும் எழுதலாம்.

இங்கு p ஒரு நேர் மதிப்பு.

$p \geqslant 2$ என்றவாறுன, ஒவ்வொரு p மதிப்புக்கும் ஒரேயொரு x மதிப்பே உள்ளது. x கூடும்போது p-ம் கூடும். $x = 0$ என்ருல் $p = p_0$ என்ற ஏதாவது ஒரு மதிப்பு சில சமயங்களில் பூஜ்யமாகவும் இருக்கலாம்.



படம் 3.
அளிப்பு வளைகோடு

இங்கு $x = 0$ எனும் போது $p = 2$.

இவ் விலைக்குக் குறைவாக அப்பொருளே அளிக்கப்படமாட்டாது. உற்பத்தியாளர்களை பொருளை விற்பதற்குத் தூண்டுகின்ற(மிகச் சிறிய) மீச்சிறு விலையே (minimum price) இது வாகும்.

விலை கூடக்கூட, உற்பத்தியாளர்கள் அதிக அளவில் பொருளை உற்பத்திசெய்து சந்தைக்கு விற்பனைக்கு கொண்டு வருகின்ருர்கள். அளிப்பு வளைகோடு படம்மூலம் மேலே விளக்கப்படுகிறது.

தேவை, அளிப்பு இவற்றின் நேர்கோட்டு நியதிகள் (Linear Laws of Demand and Supply)

மிகவும் எளிதான, 'தேவை வளைகோடு' ஒரு நேர் கோட்டு வடிவத்தைப் பெற்றிருக்கும். அதாவது $p = p_0 + mx$. இங்கு $x = 0$ எனும்போது விலையின் மதிப்பு p_0 ஆக இருக்கும். m என்ற சரிவு எதிர் மறையிலிருக்கும் அல்லதுபூஜ்யமாக இருக்கலாம். ஏனெனில் p ஒரேயொரு முறை இறங்கும் x-ன் சார்பலன் ஆகும். இங்கு x-ன் அலகும் p-ன் அலகும் மாறுபட்டிருக்கின்றன. இந்த தேவை நியதியைவேறு விதமாகவும் எழுதலாம்.

அதாவது $p = p_0 + mx$ என்ருல்,

$$mx = p - p_0 \tag{1·3}$$

அதாவது $x = \dfrac{p}{m} - \dfrac{p_0}{m}$

இங்கு, $-\dfrac{1}{m} = k$ என்று சமனிட்டால், (k என்பது ஒரு நேர் எண்)

$$x = -pk + p_0 k$$

$$= x_0 - kp \ [x_0 = p_0 k \text{ ஒரு நேர் எண்})$$

எனவே k-ம், x_0-ம் நேர் எண்கள் என்ருல்,

$x = k_0 - kp$ என்பது தேவை நியதியின் மற்ெருரு வடிவமாகும். இதையே மற்ெருரு முதல்படிப் பொதுச் சமன்பாடாகவும் $ax + bp = c$ என்ற வடிவிலும் எழுதலாம். அதாவது,

$x = x_0 - kp$ என்ருல்,

$$\frac{x}{x_0} = 1 - \frac{kp}{x_0} \quad \ldots \qquad (1 \cdot 4)$$

அதாவது $\frac{x}{x_0} + \frac{kp}{p_0 k} = 1 \quad [\because \quad x_0 = p_0 k]$

எனவே $\frac{x}{x_0} + \frac{p}{p_0} = 1. \qquad (1 \cdot 5)$

மிக எளிதான அளிப்பு வளை கோட்டின் வடிவத்தையும் கீழ்க் கண்ட ஓர் நேர் கோட்டில் அமைக்கலாம்.

$$p = P_0 + M_x \qquad (1 \cdot 6)$$

இங்கு (i) P_0 என்பது அனுமானிக்கப்பட்ட அளிப்பு நியதியின் கீழ் உற்பத்தியாளர்கள் பொருளை அளிப்பதற்குரிய குறைந்த பட்ச விலையாகவும்,

(ii) நேர்கோட்டின் சரிவு $M > 0$ ஆகவும் இருக்கின்றன. x-க்கு இதை தீர்வு கண்டால்,

$$x = \frac{1}{M} p - \frac{1}{M} P_0$$

$$= Kp - X_0 \left(\text{இங்கு } K = \frac{1}{M} \ ; \ X_0 = K P_0 \right) \qquad (1 \cdot 7)$$

இங்கு K, X_0 என்பன நேர் நிலை எண்களாகும்.

ஒரு மாதிரிக் கணக்கின் மூலம் இரு நேர் கோடுகளையும் (அதாவது தேவைக்கானதும் அளிப்புக்கானதுமான இரு கோடுகளையும்) ஒரே வரைபடத்தில் வரைந்து காட்டுவோம்.

மாதிரிக் கணக்கு

(i) தேவை நியதி $3p + 2x = 27$

(ii) அளிப்பு நியதி $6p - 2x = 9$

என்றவாறு தரப்பட்டுள்ளன. இரு நியதிகளுக்குமான நேர் கோடுகளை வரைய அதனதன் x, p மாறிகளின் எல்லைகளை நிர்ணயித்து கோடுகளை ஒரே வரைபடத்தில் வரைந்து காட்டவும்.

(i) $3p + 2x = 27$ என்ற தேவைச் சமன்பாட்டில்

$x = 0$ ஆனுல், $p = 9$ ஆகிறது.

$p = 0$ எனும்போது, $x = 13{\cdot}5$ ஆகிறது.

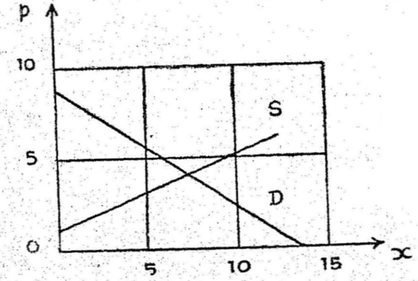
எனவே, $0 \leqslant x \leqslant 13{\cdot}5$, $0 \leqslant p \leqslant 9$ என்று அறிகிரேும்.

(ii) அளிப்பு நியதியை $p = \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}$ என்றும் எழுதலாம்.

$x = 0$ என்ருல் $p = \frac{3}{2}$

$x = 12$ என்று சமனிட்டால் $p = \frac{11}{2}$ ஆகிறது.

இங்கு, $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $\left(12, \frac{11}{2}\right)$ என்ற இரு புள்ளிகள் கிடைக்கின்றன. எனவே இந்த இரு நேர்கோடுகளிலும் ஒரே வரைபடத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளதை கீழே படத்தில் காணலாம்.



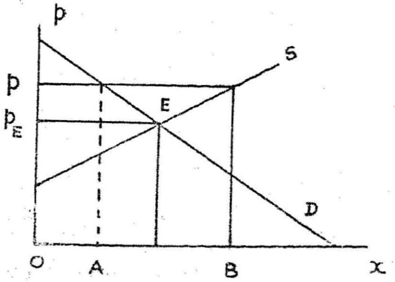
படம் 4.

S : அளிப்பு நேர்கோடு D : தேவை நேர்கோடு.

தேவை, அளிப்புகளின் ஒருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கான சந்தைச் சமநிலை (Market Equilibrium for Linear demand and supply functions)

ஒரு நிறைவுப் போட்டி வரையறையின்படி, எந்த ஒரு தனிப் பட்ட நுகர்வோரோ அல்லது எந்த ஒரு தனிப்பட்ட உற்பத்தி யாளரோ சந்தையில் ஒரு பொருளின் விலையைத் தங்களால் மாற்றி யமைக்க முடியாது. சந்தையில் சமநிலை எப்போது எப்படி ஏற்படும் என்றால், நிறைவுப் போட்டியின் கீழ், தேவையான பொருளின் அளவும், அளிக்கப்படும் பொருளின் அளவும் சமமாக இருக்கும்போதுதான், சந்தைச் சமநிலை ஏற்படுகிறது. x, p இரு மாறிகளையும் தேவை, அளிப்பு நியதிகளில் பயன்படுத்துவதால், தேவை, அளிப்பு வளைகோடுகளை ஒரே வரைபடத்தில் வரையும் சமயத்தில் அவையிரண்டும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியின் மூலமாக சமநிலை உற்பத்தியும், சமநிலை விலையும் கிடைக்கப் பெறுகின்றன. இவ்வொரு சமநிலை அளவைகளையும் இயற் கணிதத்தின் வாயிலாக (algebraically) (இரு சமன்பாடுகள் தீர்வின் மூலம்) கண்டறியலாம்.

இப்படி ஒரு நிலைமை எப்படி பொருளாதாரத்தில் உருவாகிறது என்று இப்போது விளக்குவோம். நடைமுறை விலை சமநிலையை விடக் (கூடியிருந்தால்) அதிகமாக இருந்தால் தேவைப் படும் அளவு (OA படத்தில் காண்க.) அளிக்கப்படும் அளவை (OB) விட குறைவாக இருக்கும். இந்த அதிக விலையில் சில உற்பத்தியா ளர்கள் தங்கள் பொருட்களை விற்க முடியாது. எனவே விற்காமலிருப்பதைக் காட்டி லும் குறைந்த விலைக்காவது விற்கலாம்என்ற நோக்குடன் விலையைக் குறைக்க முன் வருவார்கள். உற்பத்தியாளர்களுக் கிடையேயுள்ள போட்டி மனப்பான்மை சராசரி விலையைக் குறைக்கச் செய்து சமநிலை விலைக்குக் கொண்டு வரும். இந்நிலை யில் தேவைப்படும் அளவும் அளிக்கப்படும் அளவும் சரிசமமாக இருக்கும். இதேபோல நடைமுறை விலை சமநிலை விலையை விடக் குறைவாக இருந்தால், அளிக்கப்படும் பொருளின் அளவு தேவையைப் பூர்த்தி செய்யாது. எனவே நுகர்வோர்



படம் 5.

பொருள் கிடைக்காமல் திரும்பிச் செல்வதைவிட கொஞ்சம் கூட விலை கொடுத்தாவது பொருளை வாங்கிச் செல்வர். இப்படிப்பட்ட நுகர்வோர் அதிகமானுல் அவர்களுக்கிடையே ஏற்படும் போட்டியினுல் அப்பொருளின் சராசரி விலை அதிகமாகிக் கொண்டே வந்து சமநிலை விலையை அடையும். இச் சமயத்திலும் தேவைப்படும் பொருளின் அளவும் அளிக்கப்படும் பொருளின் அளவும் சரிசமமாகின்றது.

மாதிரி 1 : தேவை நியதியும் அளிப்பு நியதியும் முறையே கீழ்க்கண்டவாறு தரப்பட்டுள்ளன.

$$3p + 2x = 27$$

$$6p - 2x = 9$$

சந்தையின் சமநிலை விலையையும் சமநிலை அளவையும் கணக்கிடுக.

இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்வு கண்டு x, p-ன் மதிப்புகளைக் கணக்கிடலாம்.

$$3p + 2x = 27 \qquad (1)$$

$$6p - 2x = 9 \qquad (2)$$

$$(1) + (2);\ 9p = 36$$

$$\therefore\ p = 4 \qquad (3)$$

p-ன் மதிப்பை (2)-ல் சமனிட

$$3 \times 4 + 2x = 27$$

$$2x = 15$$

$$x = 7{\cdot}5$$

எனவே சந்தை சமநிலை விலை $p = 4$ ரூபாய்கள்.

சமநிலை அளவு $x = 7{\cdot}5$ அலகுகள்.

இங்கு x_D = தேவைப்படும் அளவு = x_S = அளிக்கப்படும் அளவு = 7·5.

மாதிரி 2 : தேவை நியதி $x = 1 \cdot 8 - 0 \cdot 4\, p$ (1)

அளிப்பு நியதி $x = -0 \cdot 3 + 0 \cdot 8\, p$ (2)

என்ருல் சந்தைச் சமநிலை விலை, அளவைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு : இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்வு கண்டால்

$$(1) - (2): \quad 0 = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2\, p$$

$$\text{எனவே } p = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = \frac{7}{4} = 1 \cdot 75$$

$p = 1 \cdot 75$ என்று (1)-ல் சமனிட்டால்

$$x = 1 \cdot 8 - 0 \cdot 4\,(1 \cdot 75)$$

$$= 1 \cdot 8 - 0 \cdot 7$$

$$\therefore \quad x = 1 \cdot 1$$

ஆகவே சந்தைச் சமநிலை அளவு $x_S = x_D = x = 1 \cdot 1$ அலகுகள்.

சந்தைச் சமநிலை விலை $p = 1 \cdot 75$ ரூபாய்கள்.

பல மாறிகளுக்கான ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் (Linear Equations in Several Variables)

ஒரு பொருளின் தேவையும் அளிப்பும் அதைச் சார்ந்த மற்ற பொருள்களையும், அப்பொருளின் விலையையும் சார்ந்துள்ளன. முன்னே விளக்கப்பட்ட கோட்பாடுகளை (பல மாறிகளுக்கும்) பல பொருட்களுக்கும் விளக்கலாம் என்ருலும், இங்கு 2 பொருட்களை எடுத்துக் கொண்டால் அவற்றிற்கான தேவை, அளிப்பின் அளவுகளையும் அவற்றிற்கான விலைகளையும் கொண்டு சந்தைச் சமநிலை விலைகளையும் சந்தைச் சமநிலை அளவுகளையும் முன் போலவே கணக்கிட முடியும். இங்கு 2 சமன்பாடுகளுக்குப் பதிலாக 4 சமன்பாடுகள் இருக்கும். 4 மாறிகள் இருக்கும். தேவைப்படும் அல்லது அளிக்கப்படும் பொருட்கள் x, y என்ருல், அவற்றின் விலைகள் முறையே p, q என்ருல், இவ்விரண்டு பண்டங்களுக்கான தேவைச் சமன்பாடுகள் கீழே காணலாம்.

$$x = x_0 - kp + cq \qquad (1 \cdot 8)$$

$$y = y_0 + dp - nq \qquad (1 \cdot 9)$$

இங்கு x_0, y_0, k, n என்பன நேர்நிலை எண்கள் (Positive constants); c, d என்பனவும் நிலை எண்கள். இருந்தாலும் அவற்றின் குறிகள் (signs) பண்டங்களின் தன்மையைப் பொறுத்து மாறுபடும். இயல்பான பொருளாதார நிலைகளில் $x_0 + cq$-ம், $y_0 + dp$-ம் நேர் எண்களாக இருக்க வேண்டும்.

மேற்கண்ட 1, 2 சமன்பாடுகள் மூலம் p, q-க்கான மதிப்புகளை x, y-ன் வாயிலாக தீர்வு கண்டால் கிடைக்கும் விளைவு,

$p = p_0 + mx$ என்ற சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தியிருத்தல் வேண்டும். p_0-ஒரு நேர் எண்; m-ஒரு எதிர்மறை மதிப்பு. இந் நிபந்தனைகள் ஒத்து வந்தால் 1, 2 சமன்பாடுகள் இயல்பான தேவைச் சமன்பாடுகள் ஆகும்.

இதே போல இரு பண்டங்களுக்கான ஒரு படி அளிப்புச் சமன்பாடுகளை கீழே கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$x = -X_0 + Kp + Cq \qquad (1 \cdot 10)$$

$$y = -Y_0 + Dp + Nq \qquad (1 \cdot 11)$$

இங்கு X_0, Y_0, K, N என்பன நேர் எண்கள்.

C, D என்பன நிலை எண்கள். அவற்றின் குறிகள் (signs) பண்டங்களின் தன்மையைச் சார்ந்திருக்கும். இச் சமன்பாடுகளைத் தீர்வு கண்டால் p, q இவற்றை x, y மூலமாக எழுதலாம். அதன் விளைவு $p = P_0 + M_x$ என்ற அளிப்பு நியதியில் பொருந்தியிருந்தால் 3, 4 சமன்பாடுகள் இயல்பான அளிப்புச் சமன்பாடுகள் ஆகும்.

நிறைவுப் போட்டியின் கீழ், சந்தைச் சமநிலையானது தேவைப் படும் பொருள்களின் அளவுகளும், அளிக்கப்படும் பொருள்களின் அளவுகளும் சமமாக இருக்கும்பொழுது கிடைக்கிறது. (1), (2), (3), (4) சமன்பாடுகளைத் தீர்வு காண்பதின் மூலம் X, Y பொருட்களின் சந்தைச் சமநிலை அளவுகளையும் (x, and y) சந்தைச் சமநிலை விலைகளையும் (p and q) நிர்ணயிக்க முடிகிறது. (1), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து x-ஐ நீக்கியும், (2), (4) சமன்பாடுகளில் y-ஐ நீக்கியும் தீர்வு காணலாம். இதனால் கிடைக்கும் சமன் பாடுகள் p, q மாறிகளின் சமன்பாடுகள் ஆகும். இதற்கான தீர்வின் மூலம் p, q மதிப்புகளைக் கண்டுபிடித்து, பிறகு அவற்றின் மூலம் x, y மதிப்புகளைக் கணக்கிடலாம்.

இங்கு p, q, x, y மாறிகள் நேர் எண்களாகவும் இயல்பான தேவை, அளிப்பு சமன்பாடுகளுக்கேற்ற மற்ற நிபந்தனைகளைப் பூர்த்தி செய்தும் இருந்தால், அப்படிக் கிடைக்கும் தீர்வு பொருளாதாரத்தில் ஒரு பொருளுடைய தீர்வாக (Significant solution) கருதப்படுகிறது.

மாதிரி: X, Y இரு பொருட்களின் தேவைச் சமன்பாடுகள்

$$x_D = 5 - 2p + q$$

$$y_D = 6 + p - q$$

அளிப்புச் சமன்பாடுகள்,

$$x_S = -5 + 4p - q$$

$$y_S = -4 - p + 3q \quad \text{என்றால்}$$

இரு பொருட்களின் சந்தைச் சமநிலை அளவுகளையும் விலைகளையும் நிர்ணயிக்கவும்.

சந்தைச் சமநிலை அளவுகள், விலைகள் நிர்ணயிக்கவேண்டியிருப்பதால் $x_D = x_S = x$ என்றும் $y_D = y_S = y$ எனவும் கொண்டு தீர்வு காண்போம்.

$$\therefore \quad x = 5 - 2p + q = -5 + 4p - q$$

அதாவது, $10 = 6p - 2q.$ (1)

இதேபோல $y = 6 + p - q = -4 - p + 3q$

அதாவது $10 = -2p + 4q$ (2)

(1) × 2 என்றால் $20 = 12p - 4q$ (3)

(2) + (3); $30 = 10p$

எனவே $p = 3$

$p = 3$ என்று (2)-ல் சமனிட்டால்

$$10 = -2(3) + 4q$$

$$4q = 16$$

$$q = 4$$

இந்த p, q மதிப்புகளை x, y சமன்பாடுகளின் சமனிட்டால்,

$$x = 5 - 2p + q = 5 - 2(3) + 4 = 3.$$

$$y = 6 + p - q = 6 + 3 - 4 = 5.$$

எனவே X, Y இரு பொருட்களின்

சந்தைச் சமநிலை விலைகள் $p = 3, q = 4$

சந்தைச் சமநிலை அளவுகள் $x = 3, q = 5$.

மாதிரி: இரு பண்டங்களுக்கான தேவைச் சமன்பாடுகள்

$$x = 5 - p + q \qquad (1)$$

$$y = 10 - p - q \qquad (2)$$

அவற்றின் அளிப்புச் சமன்பாடுகள்

$$x = -5 + p + q \qquad (3)$$

$y = -2 - p + 2q$ என்றால் (4)

(i) தேவைச் சமன்பாடுகளும் அளிப்புச் சமன்பாடுகளும் இயல்பானவை (அவைகளுக்கேற்ற நிபந்தனைகளுக்குள்) என்று நிரூபித்துக் காட்டுக.

(ii) சந்தைச் சமநிலை அளவுகளையும் கணிக்கவும்.

தீர்வு: (i) y நேர் மதிப்புடையதாக இருக்கவேண்டுமானால் $10 - p \geqslant 0$ என்ற நிபந்தனைப்படி $p \leqslant 10$ ஆக இருத்தல் வேண்டும். தேவைச் சமன்பாடுகளிலிருந்து p, q-ஐத் தீர்வு காண்போம்.

(1) + (2): $x + y = 15 - 2p$

எனவே $p = \frac{1}{2}(15 - x - y)$.

(1) − (2): $x - y = -5 + 2q$.

எனவே $q = \frac{1}{2}(5 + x - y)$.

p மதிப்பின் x-ன் கெழு ஒரு எதிர்மறை மதிப்பு. எனவே p ஒரேயொரு முறை இறங்கும் x-ன் சார்பலன் என்பது நிரூபணமாகிறது. p எப்போதும் ஒரு நேர் எண்ணாக இருக்கவேண்டு

மென்பதால் $y \leqslant 15$ என்பது இரண்டாம் நிபந்தனையாகும். மேலும் எதிர்பார்த்தபடி q-ல் y-ன் கெழு ஒரு எதிர்மறை மதிப்பு. இங்கு x-ன் கெழு நேர் எண்ணுகையால், x-க்காக ஒரு நிபந்தனையும் தேவையில்லை. இந்த நிபந்தனைகளுடன் தரப்பட்ட தேவைச் சமன்பாடுகள் இயல்பானவையாகின்றன. இப்போது அளிப்புச் சமன்பாடுகளைக் கவனிப்போம்.

$$2 \times (3) - (4): \quad 2x - y = -8 + 3p.$$

$$\therefore \quad p = \frac{1}{3}(8 + 2x - y)$$

$$(3) + (4): \quad x + y = -7 + 3q$$

$$\therefore \quad q = \frac{1}{3}(7 + x + y)$$

p-ல் x-ன் கெழுவும், q-ல் y-ன் கெழுவும் இரண்டும் நேர் மதிப்புகளே. $p = 0$ எனும்போது x ஒரு எதிர்மறை மதிப்பு ஆக இருக்கவேண்டும் என்பதால் $q \leqslant 5$ என்ற நிபந்தனையின் கீழ் அளிப்பு சமன்பாடுகள் இயல்பானவை. மேலும் $x = 0$ என்றால் p நேர் எண் என்பதற்கு, $y \leqslant 8$ என்பது மற்றொரு நிபந்தனையாகும். p-க்கோ x-க்கோ ஒரு நிபந்தனையும் தேவையில்லை; ஏனென்றால் $q = 0$ என்றால் y ஒரு எதிர்மறை மதிப்பு மேலும் $y = 0$ என்றால் q ஒரு நேர் மதிப்பு.

எனவே தேவைச் சமன்பாடுகளும் அளிப்புச் சமன்பாடுகளும் இயல்பான சமன்பாடுகள் (சில நிபந்தனைகளுடன்) என்று நிருபணமாகிறது.

நிபந்தனைகள்: (a) $p \leqslant 10$, (b) $y \leqslant 15$ — தேவைச் சமன்பாடுகளுக்கு

(c) $q \leqslant 5$, (d) $y \leqslant 8$ — அளிப்பு சமன்பாடுகளுக்கு

(ii) சந்தைச் சமநிலை அளவுகளைக் கணக்கிட.

$$x = 5 - p + q = 5 + p + q \quad (\text{ஏனெனில் } x_D = x_S = x)$$

$$\therefore \quad 2p = 10 \quad \underline{p = 5}$$

$$y = 10 - p - q = -2 - p + 2q$$

$$\therefore \quad 3q = 12 \quad \underline{q = 4}$$

$\therefore \quad x = 5 - p + q = 5 - 5 + 4 \;\; \underline{= 4}$

$y = 10 - p - q = 10 - 5 - 4 \;\; \underline{= 1}$

$\therefore$ சந்தைச் சமநிலை அளவுகள் $x = 4 \, ; \; y = 1$

சந்தைச் சமநிலை விலைகள் $p = 5 \, ; \; q = 4$

பயிற்சிகள்

1. ஒரு பண்டத்தின் தேவை நியதி $p = 36 - 4x$ என்றால்,

(a) அப்பண்டத்திற்காக யாரும் கொடுக்கக் கூடிய மிக அதிக விலை யாது ?

(b) அப்பண்டம் இலவசமானால், தேவையின் அளவு என்னவாக இருக்கும் ?

(c) தேவை வளைகோடு வரைக.

2. ஒரு மலிவான கிராமபோன் செட் p ரூபாயில் விற்கப் படுகிறது. ஆண்டொன்றுக்கு x நூறு செட்டுக்கள் தேவைப்படுவதற்கான தேவை நியதி,

$$x = \frac{90}{p+5} - 6 \text{ என்றால்,}$$

தேவை வளைகோட்டை வரைக. எந்த ஒரு விலையின்போது தேவை பூஜ்யத்தை நெருங்கும் ?

3. பற்பசை விற்கும் நிறுவனம் நான்கு தொடர்ச்சியான மாதங்களில் வேறு விலைகளை நிர்ணயித்தால் ஏற்படும் தேவைகளின் வடிவை ஆராய்கிறது. கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து தேவை வளைகோடு வரையவும்.

விலை ஒரு டியூபின் விலை ரூபாயில்.	1·00	1·50	2·00	2·50
உற்பத்தியாகும் டியூப்கள்	1030	900	795	715

4. $p = \frac{a}{x + b}$ என்ற தேவை வளைகோட்டை ஆராய்க. இங்கு a, b இரண்டும் நேர் நிலை எண்கள். விலை குறைபக் குறைய தேவையானது பூஜ்யத்திலிருந்து மிகப் பெரிய அளவுகள் வரை ஏறிக்கொண்டே செல்கிறது என்று நிரூபித்துக் காட்டு.

5. அமெரிக்காவில் 1915 – 1929 வருடங்களில் சர்க்கரையின் தேவைக்கான சார்பலன் $x = 135 - 8p$ (தோராயமாக) என்றால் (இங்கு x, p என்ற சாதகமான அலகுகளில் எடுக்கப் பட்டன) மூன்று புள்ளிகளைக் கண்டுபிடித்து அதன் மூலம் தேவை வளைகோடு வரைக.

6. $p = 0, 2, 4$ மதிப்புகளைக் கொண்டு $x = 12.5 - 2 \cdot 25p$ என்ற தேவை வளைகோட்டை வரைக.

7. தேவை நியதி $2p + 3x = 24$. இச் சமன்பாட்டை x-க்குத் தீர்வு கண்டு பிறகு p-க்குத் தீர்வு காணவும். தேவை வளைகோட்டை வரைக. இதே வரைபடத்தில் $x = p - 5$ என்ற அளிப்பு வளைகோட்டையும் காண்பிக்கவும்.

8. கீழே காணப்படும் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றும் தேவை சமன்பாடா அல்லது அளிப்பு சமன்பாடா என்று விளக்கத்துடன் கூறவும் :

(a) $p = -3 - \frac{3}{2}x$

(b) $p = 3 + \frac{3}{2}x$

(c) $p = -3 + \frac{3}{2}x$

(d) $p = 3 - \frac{3}{2}x$

கீழே காணப்படும் எல்லா வினாக்களுக்கும், முதலில் தேவை அளிப்பு வளைகோடுகள் வரைந்து அவற்றின் மூலமாக சந்தைச் சமநிலை விலையையும் சந்தைச் சமநிலை அளவையும் கணிக்கவும். பிறகு இயற்கணித முறைப்படி தரப்பட்ட இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்வு கண்டு சந்தைச் சமநிலை விலை அளவு இவற்றையும் கணித்து முன் கண்ட மதிப்புகளுடன் ஒப்பிட்டுச் சரிபார்க்கவும்.

9. தேவைச் சமன்பாடு $p = 12 - 5x$; அளிப்புச் சமன்பாடு

$$p = 4 + 4x$$

10. தேவைச் சமன்பாடு $p = 6$; அளிப்புச் சமன்பாடு

$$x = 3p - 3$$

11. தேவை, அளிப்புச் சமன்பாடுகள் முறையே

$$x = 1{\cdot}8 - 0{\cdot}4p$$

$$x = -0{\cdot}3 + 0{\cdot}8p$$

12. தேவை வளைகோடு $8p + 5x = 40$

அளிப்பு வளைகோடு $x = 4p - 6$

13. தேவை, அளிப்பு நியதிகள் முறையே

$$p = 1{\cdot}5 - 0{\cdot}6x$$

$$p = 0{\cdot}6 + 0{\cdot}5x$$

14. இரு பொருள்களுக்கான இரு தேவைச் சமன்பாடுகள்

D : $x = 10 - 3p + q$

$y = 20 + 4p - 5q$ (எல்லா p, q மதிப்புகளுக்கும்)

(a) p-க்கும் q-க்குமான சமன்பாடுகளைத் தீர்வு காணவும். அவற்றிலிருந்து x, y மதிப்புகளை நிர்ணயிக்கவும்.

(b) அளிப்பு நியதிகள் $x = 9$, $y = 14$ என்றவாறு மிக எளிதாக இருந்தால் இருபொருள்களின் சந்தைச் சமநிலை விலைகளையும் அவற்றின் சந்தைச் சமநிலை அளவுகளையும் கணிக்கவும்.

15. (a) $x = 4 - 2p + q$

$$y = 20 + p - 5q$$

இரண்டும் 'இயல்பான' தேவைச் சமன்பாடுகளாக இருப்பதற்கு x-க்கும் y-க்கும் என்ன நிபந்தனைகள் உண்டு ?

(b) அளிப்புச் சமன்பாடுகள் $x = 4p$; $y = -1 + 6q$ என்றால், சந்தைச் சமநிலை விலைகள் p, q ; சந்தைச் சமநிலை அளவுகள் x, y இவற்றை நிர்ணயிக்கவும்.

16. இரு பொருள்களின் தேவைச் சமன்பாடுகள்

$$p = 4 - x + y ; \quad q = 4 + x - 2y$$

எனவும் அவற்றின் அளிப்புச் சமன்பாடுகள்

$$4p = 7 + 2x - y; \quad 2q = y + 1$$

எனவும் இருந்தால் அவற்றின் சந்தைச் சமநிலை விலைகளையும் அளவுகளையும் கண்டுபிடிக்கவும். அத்துடன் தீர்வு ஒரு 'பொருளுடைய' தீர்வு என்று நிரூபிக்கவும்.

17. கீழ்க்காணும் தேவைச் சமன்பாடுகளும் அளிப்புச் சமன்பாடுகளும் "இயல்பான" சமன்பாடுகள் என்பதற்கு p, q, x, y இவற்றின் மீதுள்ள கட்டுப்பாடுகளை நிர்ணயிக்கவும். தேவைச் சமன்பாடுகள் :

$$x = 17 - 2p - q; \quad y = 14 - p - 2q \text{ ஆகும்.}$$

அளிப்புச் சமன்பாடுகள் :

$$x = -10 + 4p + q; \quad y = -7 + p + 2q \text{ என்பன.}$$

மேலும் p, q, x, y-க்கான சமநிலை மதிப்புகளைக் கணிக்கவும்.

மதிப்புக் கோட்பாட்டில் காலத்தின் பங்கு (Time Element in the theory of value)

தேவை, அளிப்பின் சக்திகளின் இணைந்த செயல்களின் மூலம் விலை நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. தேவை வளைகோடு அளிப்பு வளைகோட்டை வெட்டும் (இடத்தில்) புள்ளியில் சமநிலை விலை உண்டாகிறது. அந்த சமநிலை விலையைவிடக் கூடிய விலையில், அளிப்பின் அளவு தேவையின் அளவைவிடக் கூடுவதைப் பார்த்தோம். அதேபோல சமநிலை விலையைவிட குறைந்த விலையில், தேவை கூடி, அளிப்பு குறைந்ததையும் முன்பு விளக்கியுள்ளோம்.

காலம் அல்லது நேரம் இங்கு முக்கிய பங்கு வகிக்கிறது. மார்ஷல் மூன்று காலவரைகளில் சமநிலையை விளக்குகிறார். (i) மிகக் குறைந்த நெருக்கடிச் சமநிலை (Very short ran); (ii) குறைந்த நெருக்கடிச் சமநிலை; (iii) நீண்ட கால நெருக்கடிச் சமநிலை என்பன.

(i) சந்தை விலை என்பது தேவைக்கும் அளிப்புக்கும் இடையே உடனுடன் நிகழும் சமநிலையின் விளைவாகும். இதற்கான காலவரை மிகக் குறுகியதாக இருக்கும். முன்பே உற்பத்தி செய்த பொருட்களைத் தான் நிறுவனம் விற்க முடியும். (உதாரணம் மீன், பழ வகைகள்). இதுவே மிகக் குறைந்த நெருக்கடிச் சமநிலையாகும்.

(ii) குறைந்த நெருக்கடி விலை என்பது ஒரு கொடுக்கப்பட்ட தேவை வளைகோட்டுக்கும், குறைந்த நெருக்கடி அளிப்பு வளை கோட்டுக்கும் இடையே ஏற்படும் சமநிலையின் விளைவாகும். இங்கு நிறுவனங்கள் பொருள்களை அதிகமாகத் தயாரிக்க கால வரை நீடிக்கப்படும். இங்கு விலை, விளிம்புச் செலவுக்குச் சமமாக இருக்கும். ஆனால் தேவை நிபந்தனைகளுக்கேற்ப, இலாபம் அபரிமிதமாகக் கூடலாம், குறையலாம். ஆனாலும் இந்த விலை, மீச்சிறு சராசரி மாறும் செலவைவிடக் குறையாது; ஆகவே நட்டம் (loss) அதிகம் இராது.

(iii) நீண்டகால அல்லது இயல்பான விலை (Normal price) ஒரு தரப்பட்ட தேவை வளை கோட்டுக்கும், ஒரு நீண்டகால அளிப்பு வளை கோட்டுக்குமிடையே காணப்படும் சமநிலையின் விளைவாகும். தேவை நிபந்தனைகளுக்கேற்ப, அளிப்பு நிபந்தனைகள் முழுமையாக சரி செய்யப்படுகின்றது. இங்கு இயல்பான விலை மீச்சிறு நீண்டகால சராசரிச் செலவுக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

இவ்வாறு இம் மூன்று காலவரைகளில் சந்தைச் சமநிலை விலை நிர்ணயிக்கப்படுகிறதை அறிகிறோம்.

சந்தைச் சமநிலையும் இருபடிச் சமன்பாடுகளும் (Market Equilibrium and Quadratri Equations)

சந்தைச் சமநிலை அளவும், விலையும் வரைபடத்தின் மூலம், அல்லது இயற்கணிதத்தின் மூலம் கணக்கிட முடியும். இங்கு இயற்கணித முறையைப் பயன்படுத்தியும் வரை படத்தின் மூலமும் எப்படிக் கணிப்பது என்று காணலாம். தேவைச் சமன்பாடும், அளிப்புச் சமன்பாடும் இருபடிச் சமன்பாடுகளாக இருந்தாலும், ஏதாவது ஒரு சமன்பாடு ஒருபடிச் சமன்பாடாகவும் மற்றொன்று இருபடிச் சமன்பாடாகவும் இருந்தாலும் அவற்றிற்கான வழி முறைகள் கீழே விளக்கப்பட்டுள்ளன.

உதாரணமாக

தேவைச் சமன்பாடு $D : 9x + 4p = 40$

அளிப்புச் சமன்பாடு $S : 9x = p^2 - 4$

சந்தைச் சமநிலையில் $D = S$ என்பதால்

$$9x = p^2 - 4 = 40 - 4p$$

எனவே $p^2 + 4p - 44 = 0$

$$\therefore\ p = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 176}}{2}$$

$$= -2 \pm \frac{\sqrt{192}}{2}$$

$$= -2 \pm 6{\cdot}93 = 4{\cdot}93 \text{ அல்லது } -8{\cdot}93$$

இங்கு p ஒரு நேர் எண் என்பதால் $p = -8{\cdot}93$ என்பது அர்த்தமற்றது; அபத்தமானது. எனவே $p = 4{\cdot}93$ என்று முடிவு செய்கிறோம்.

D சமன்பாட்டிலிருந்து $9x = 40 - 4p$

$$x = \frac{40 - 4(4{\cdot}93)}{9}$$

$$= \underline{2{\cdot}25}$$

எனவே சந்தைச் சமநிலை அளவு $= x = 2{\cdot}25$ அலகுகள்.

சந்தைச் சமநிலை விலை $= p$ ரூ. $= 4{\cdot}93$ ரூபாய்கள் என்க.

இந்தக் கேள்விக்கான தீர்வை வரைபடத்தின் மூலமாகவும் வரைந்து சந்தைச் சமநிலை அளவு, விலையை இரு வளைகோடுகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியிலிருந்து நிர்ணயிக்க முடியும். கீழே உள்ள படம் இதனை நன்கு விளக்குகிறது.

தேவைச் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்

$$D : 9x + 4p = 40$$

இங்கு $x = 0$ என்றால், $4p = 40$; $p = 10$

எனவே $(x, p) = (0, 10)$ என்பது ஒரு புள்ளி.

$p = 0$ என்றால், $9x = 40$; $x = \frac{40}{9} = 4{\cdot}44$

எனவே இன்னொரு புள்ளி $(x, p) = (4{\cdot}44, 0)$.

மேலும் D ஒரு நேர்கோட்டுச் சமன்பாடு என்பதால் இவ்விருபுள்ளிகளைக் கொண்டு D வளைகோடு வரையலாம்.

அளிப்புச் சமன்பாடு : $S: 9x = p^2 - 4.$

$x \geqslant 0$ என்பதால், $p^2 \geqslant 4$. அதாவது $p \geqslant 2$.

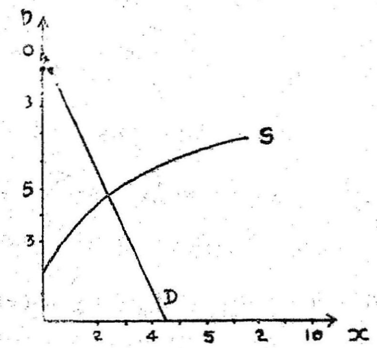
$x = 0$ என்ருல், $p = 2$ எனவே $(x, p) = (0.\ 2)$ ஒரு புள்ளி.

$p = 3$ என்ருல் $x = \frac{5}{9}$. $(x, p) = (\cdot 55, 3)$ ஒரு புள்ளி

$x = 3$ என்ருல், $p = \sqrt{27+4} = \sqrt{31} = 5\cdot 57$; (x, p)
$= (3, 5\cdot 57)$

$x = 5$ என்ருல் $p = \sqrt{49} = 7$. $(x, p) = (5, 7)$.

இப் புள்ளிகளைக் கொண்டு அளிப்பு வளைக்கோட்டை வரையலாம். இரு வளைகோடுகளும் கீழே வரையப்பட்டு அவை வெட்டும் புள்ளியின்மூலம் சந்தைச் சமநிலை அளவு, விலை முறையே 2·3, 4·9 என அறிகிறோம்.



படம் 6.

D: தேவை நியதிக்கான வளைக்கோடு.

S: அளிப்பு நியதிக்கான வளைகோடு.

மாதிரி : தேவைச் சமன்பாடும் அளிப்புச் சமன்பாடும் இரண்டு இருபடிச் சமன்பாடுகளாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

தேவைச் சமன்பாடு $D: \ p = 30 - 6x^2$

அளிப்புச் சமன்பாடு $S: \ p = 2x^2 + 4x + 6$

இப்போது சந்தைச் சமநிலை விலை, அளவு இவற்றைக் கணக்கிடலாம்.

$D = S$ என்றால்,

$30 - 6x^2 = 2x^2 + 4x + 6$

$24 = 6x^2 + 2x^2 + 4x$

அதாவது $8x^2 + 4x - 24 = 0$

$2x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm 7}{4} = \frac{6}{4}. \text{ இங்கு}$$

(p ஒரு எதிர்மறை மதிப்பாக இருக்கமுடியாது)

$= 1.5$

எனவே, $p = 2x^2 + 4x + 6$

$$= 2.\frac{9}{4} + 4.\frac{3}{2} + 6$$

$$= 4{\cdot}5 + 6 + 6 = 16{\cdot}5$$

எனவே, பண்டத்தின் சந்தைச் சமநிலை அளவு $= 1{\cdot}5$ அலகுகள்

பண்டத்தின் சந்தைச் சமநிலை விலை $= 16{\cdot}5$ ரூபாய்கள்.

வரைபடத்தின் மூலம் இதை இப்போது விளக்குவோம்.

$D: \; p = 30 - 6x^2$

$x = 0: \; p = 30$

$x = 1: \; p = 24$

$x = 2: \; p = 6$

$p = 0: 6x^2 = 30. \; x^2 = 5. \; x = + \sqrt{5} = 2{\cdot}24.$

எனவே, D-க்கான வளைகோட்டின் புள்ளிகள் (0, 30), (1, 24), (2, 6), 2.24, 0) இவற்றைக் கொண்டு தேவை வளைகோட்டை வரையலாம்.

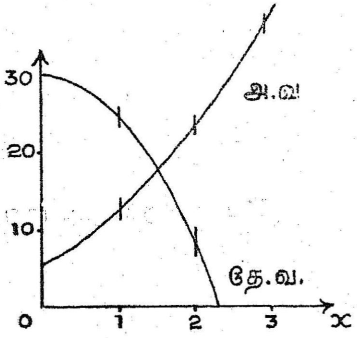
அளிப்புச் சமன்பாடு :

$S: \; p = 2x^2 + 4x + 6$

$x = 0;\ p = 6$. $x = 1;\ p = 12$.

$x = 2;\ p = 22$. $x = 3;\ p = 36$.

இங்கு அளிப்பு வளைகோடு வரைவதற்கான புள்ளிகள் (0, 6), (1, 12), (2, 22), (3, 36) ஆகும்.



படம் 7.

தே. வ. தேவை வளைகோடு

அ. வ. அளிப்பு வளைகோடு

இப்போது இரு வளைகோடு களையும் ஒரே வரைபடத்தில் கீழே வரையப்பட்டுள்ளது.

இரு வளைகோடுகளும் (1·5, 16) என்ற புள்ளியில் ஒன்றை யொன்று வெட்டிக் கொள்வ தால் சந்தைச் சமநிலை அளவு, விலைகளைக் கணிக்கமுடிகிறது. $x = 1\ 5$ அலகுகள்; $p = 16$ ரூபாய்கள் இயற்கணிதத்தின் மூலம் மிகவும் சரியான மதிப்பு களைக் கண்டுபிடிக்கிறோம். வரைபடத்தின் மூலம் கணித்த p-ன் மதிப்பு குறைந்து இருப்ப தைக் காண்கிறோம்.

மாதிரி: இப்போது தேவை அளிப்புச் சமன்பாடுகள் p-ன் இருபடிச் சமன்பாடுகளாகத் தரப்பட்டால் எவ்வாறு சந்தைச் சமநிலை அளவு, விலை இவற்றைக் கணிப்பது என்பதைப் பார்க்கலாம்.

தேவைச் சமன்பாடு: D: $x = 16 - p^2$

அளிப்புச் சமன்பாடு S: $x = 2p^2 - 4p$

இயற்கணிதத் தீர்வு: $16 - p^2 = 2p^2 - 4p$

அதாவது $3p^2 - 4p - 16 = 0$

$$p = \frac{4 + \sqrt{16 + 192}}{6}$$

$$= \frac{4 + \sqrt{208}}{6} = 3 \cdot 1$$

$$x = 16 - p^2$$
$$= 16 - 9\cdot6 = 6\cdot4$$

D : தேவைச் சமன்பாடு : $x = 16 - p^2$

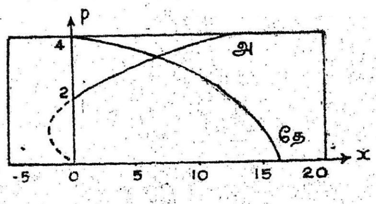
$x = 0;$ $p = 4$
$p = 3;$ $x = 7$
$p = 2;$ $x = 12$
$p = 0;$ $x = 16$

எனவே வளைகோட்டிற்கான புள்ளிகள் (0, 4), (7, 3), (12, 2), (16, 0).

S : அளிப்புச் சமன்பாடு : $x = 2p^2 - 4p$

$p = 0$ $x = 0$
$p = 2$ $x = 0$
$p = 1$ $x = -2$ × இதைச் சேர்க்க வேண்டாம்.
$p = 3$ $x = 6$
$p = 4$ $x = 16$

இவ் வளைகோட்டிற்கான புள்ளிகள் (0, 0), (0, 2), (6, 3), (16, 4). கீழே வரைபடம் வரையப்பட்டு சந்தைச் சமநிலை விலை, அளவு காண்கிறோம்.



தே : தேவை வளைகோடு
அ : அளிப்பு வளைகோடு

படம் 8.

வரைபடத் தீர்வு $x = 6\cdot5$; $p = 3\cdot2$ என அறிகிறோம்.

தேவை நியதியின் மிகவும் பொதுவான வடிவத்தைக் கீழ்க் கண்டவாறும் எழுதலாம். a, b, c நிலை எண்களானால்

$$(x + b); (p + c) = a$$

இதை மற்ருெரு விதமாகக் குறிக்க

$$p + c = \frac{a}{x + b}$$

$$p = \frac{a}{x + b} - c$$

மற்ருெரு வடிவம் :

$$(x + b)\, p = a - c\,(x + b) = A - cx$$

(இங்கு $A = a - cb$)

எனவே $p = \dfrac{A - cx}{x + b}$

மாதிரி : தேவை நியதி $(x + 20)(p + 10) = 400$

அளிப்பு நியதி $x = 2p - 7$ என்ருல்,

சந்தைச் சமநிலை விலை, அளவுகளை இயற்கணித முறையிலும் வடிவகணித முறையிலும் (Algebraically and Geometrically) கண்டுபிடிக்கவும்.

இங்கு $p = -10$

$x = -20$ என்பன அணுகு கோடுகள் (asymptotes) p-ன் மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடலாம்.

$$p = \frac{400}{x + 20} - 10 = \frac{200 - 10x}{x + 20}$$

$x = 0$ என்ருல் $p = 10$

$x = 20$ என்ருல் $p = 0$

$x = 10$ என்ருல் $p = \dfrac{10}{3}$

$x = -10$ என்ருல் $p = 30.$

அளிப்புச் சமன்பாடு : $x = 2p - 7.$

$x = 0$ என்றால் $p = \frac{7}{2}$

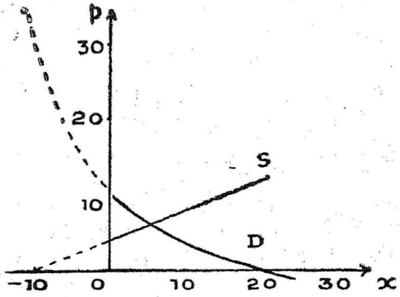
$x = 3$ என்றால் $p = 5$

$x = 5$ என்றால் $p = 6$

$x = 13$ என்றால் $p = 10$

$x = 20$ என்றால் $p = 13{\cdot}5$

இப்போது படம் வரைந்து தீர்வு காண்போம்.



படம் 9.

இருவளை கோடுகளும் (5, 6) என்ற புள்ளியில் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்கின்றன.

எனவே, பொருளின் சந்தைச் சமநிலை அளவு = 5 அலகுகள்.

பொருளின் சந்தைச் சம நிலை விலை = 6 ரூபாய்கள்

இதுவே வடிவகணிதத்தின் மூலம் தீர்வு காண்பதாம்.

இனி இயற்கணிதத் தீர்வைப் பார்ப்போம்.

$$p = \frac{200 - 10x}{x + 20} = \frac{x + 7}{2}$$

அதாவது $400 - 20x = (x + 7)(x + 20)$

$$= x^2 + 27x + 140$$

$$\therefore \quad x^2 + 47x - 260 = 0$$

$$x^2 + 52x - 5x - 260 = 0$$

$$(x - 5)(x + 52) = 0$$

$x = 5$ அல்லது $x = -52$

x ஒரு எதிர்மறை எண்ணுக இருக்க முடியாதாகையால் $x = 5$ என்பது சரியான தீர்வு.

$$\text{இப்போது } p = \frac{x + 7}{2} = \frac{5 + 7}{2} = 6$$

∴ இயற்கணித முறையிலும் $x = 5$, $p = 6$ என நிரூபிக்கப் பட்டுவிட்டது,

எனவே இரு முறைகளிலும் அப்பண்டத்தின் சந்தைச் சமநிலை விலை = 6 ரூபாய் என்றும், சந்தைச் சமநிலை அளவு = 5 அலகுகள் என்றும் அறிகிருேம்.

சந்தைச் சமநிலையில் வரி விதிப்பின் விளைவு (Effect of Taxation on Market Equilibrium)

ஒரு குறிப்பிட்ட பண்டத்துக்கு (பொருளுக்கு) அரசாங்கம் வரி விதிக்குமாளுல், நுகர்வோருக்கு பொருளின் விலை கூடும்; அதனுல் தேவை சுருங்கும் அல்லது குறையும். சந்தைச் சம நிலையில் ஏற்படும் விளைவுகளை கீழ்க்கண்ட அனுமானங்களுடன் கவனிப்போம்.

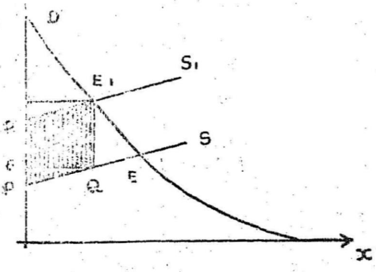
(1) நிறைவுப் போட்டியின் கீழ், நுகர்வோரது தேவை, பொருளின் விலையை மட்டுமே சார்ந்திருக்கும். அதாவது தேவைச் சார்பலன் மாருது.

(2) வரி சேர்த்த புது விலைக்கான அளிப்பு வளைகோட்டை உற்பத்தியாளர்கள் சரிப்படுத்துகின்றனர் (adjust).

(3) உற்பத்தி செய்யும் பொருளின் ஒவ்வொரு அலகுக்கும் t ரூபாய் மதிப்புள்ள வரி விதிக்கப்படுகிறது. [எடுத்துக்காட்டாக, பத்திர வரி (stamp tax)]

இப்போது அளிப்பு நியதியைக் கவனிப்போம். முதலாவதாக $p = F(x)$ என்பது வரி விதிப்புக்கு முன்புள்ள அளிப்பு விதியானுல், t என்பது x பொருளின் ஒரு அலகுக்கான வரி என்ருல், வரி விதித்த பிறகு அளிப்பு நியதி $p_1 = F(x) + t$ ஆகிறது. தேவை நியதி $p = f(x)$ என்பதற்கு சமநிலைப் புள்ளி $E(x, p)$ என்று முன்பு கண்டோம். இப்போது வரி விதித்தபின், புதிய சமநிலைப் புள்ளி $E_1(x_1, p_1)$,

இங்கு $p_1 = f(x)$; $p_1 = F(x) + t$ என்ற முறையே தேவை, அளிப்பு சமன்பாடுகளிலிருந்து கிடைக்கப்பட்ட தீர்வே (x_1, p_1) ஆகும். வடிவ கணிதத்தில் விளக்கினல், வரி விதிப்பிற்குப் பின்னர் அளிப்பு வளை கோடு, முன்பிருந்த அளிப்பு வளைகோட்டைவிட t அலகுகள் மேலே உயர்ந்து அமையும். கீழ்க்காணும் படம் இதனை நன்கு விளக்கி E_1 நிலையை நமக்குக் காட்டுகிறது.



படம் 10.

இரண்டாவதாக உதவிக்கொடை (subsidy)யை எதிர்மறை வரி எனக் கொள்ளலாம். ஒரு பொருளுக்கு வரி விதிப்பதற்குப் பதில் உதவிக்கொடையை (s-ஐ) அரசாங்கம் கொடுத்தால், நுகர்வோருக்குப் பொருளின் விலை குறையும். தேவை அதிகரிக்கும். இப்போது அளிப்பு வளைகோடு உதவிக்கொடை மதிப்புக்கேற்ற வாறு கீழே இறங்கி அமையும். மூன்ருவதாக புது சமநிலை அளவு x_1-க்கு அரசாங்கத்திற்கு கிடைக்கும் மொத்த வருமானம் (Total Revenue) $T = t_1 \; x_1$ என்ருல் இந்த மொத்தத்தை மேற்கண்ட படத்தில் கோடிட்டு செவ்வக உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

மாதிரி : தேவை நியதி $3p + 2x = 27$

அளிப்பு நியதி $6p - 2x = 9$

என்ருல் (i) ஒரு அலகுக்கு $t \frac{3}{2}$ அளவு வரி விதிக்கப்பட்டால், புதிய சமநிலை விலையையும் அளவையும் கணிக்கவும். மேலும் இதனுல் அரசாங்கத்துக்கு ஏற்படும் மொத்த வருவாயையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

(ii) ஒரு அலகுக்கு 1 உதவிக்கொடை $(s=1)$ என்று தரப்பட்டால், புதிய சமநிலை அளவு, விலையை நிர்ணயித்து இதனுல் அரசாங்கத்துக்கு ஏற்படும் மொத்தச் செலவையும் கண்டு பிடிக்கவும்.

(i) வரி விதிப்புக்கு முன்பு சந்தைச் சமநிலை அளவுகளை முதலில் கணிப்போம்.

$$3p + 2x = 27 \qquad (1)$$

$$6p - 2x = 9 \qquad (2)$$

$(1) + (2)$; $\quad 9p = 36$

$$p = 4.$$

(1)ல் $p = 4$ என்று சமனிட, $2x = 27 - 12 = 15$.

$$\therefore \quad x = \frac{15}{2}$$

எனவே சந்தைச் சமநிலை அளவு $x = \frac{15}{2}$ } வரி விதிப்புக்கு முன்னால்

,, ,, விலை $p = 4$ }

$t = \frac{3}{2}$ என்று வரி விதித்த பிறகு

தேவைச் சமன்பாடு D: $p_1 = 9 - \frac{2}{3}x$

அளிப்புச் சமன்பாடு S: $p_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}$

$$= 3 + \frac{1}{3}x$$

எனவே $\quad p_1 = 9 - \frac{2}{3}x = 3 + \frac{1}{3}x$

x-ன் தீர்வு $\quad x = 9 - 3 = 6$. அதாவது $x_1 = 6$.

$$p_1 = 9 - \frac{2}{3} \times (6) = 9 - 4 = 5. \quad \therefore p_1 = 5.$$

எனவே புதிய சமநிலை அளவுகள் $x_1 = 6$, $p_1 = 5$ ஆகும். $p = 4$. $p_1 = 5$ என்பதால் விலை 1 அலகு கூடியுள்ளது. மேலும் வரியினால் அரசாங்கத்துக்கு ஏற்படும் மொத்த வருமானம் $T = t\,x_1 = \frac{3}{2} \times 6 = 9$ ஆகிறது.

(ii) தேவை, அளிப்பு சமன்பாடுகள் முறையே

$$p_3 = 9 - \frac{2}{3}x$$

$$p_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}x - 1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$$

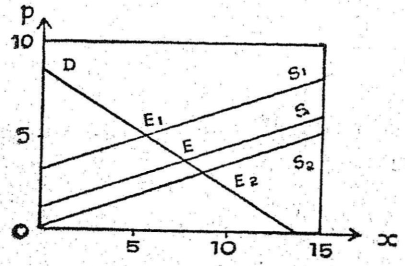
எனவே $p_3 = 9 - \frac{2}{3}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$

$\therefore \quad x = 9 - \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$ அதாவது $x_9 = \frac{17}{2}$ என்க.

$$p_2 = 9 - \frac{2}{3}\left(\frac{17}{2}\right) = \frac{27-17}{3} = \frac{10}{3}$$

எனவே புதிய சமநிலை அளவு $x_2 = \frac{17}{2}$

புதிய சமநிலை விலை $p_2 = \frac{10}{3}$ ஆகிறது.



படம் 11.

இங்கு p-க்கும் p_1-க்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் மூலம், பொருளின் விலை $\frac{2}{3}$ அலகு குறைந்துள்ளது. இதனால் அரசாங்கத்திற்கு ஏற்பட்ட மொத்தச் செலவு $S = s.x_2 = 1.\left(\frac{17}{2}\right) = \frac{17}{2}$ ஆகும். இந்த எல்லா விளைவுகளையும் கீழே காணும் படம் நன்கு விளக்குகிறது.

மாதிரி : தேவை நியதி $x = 16 - 2p$

அளிப்பு நியதி $4x = 4p + p^2$ என்றும் கொள்வோம். $t = 2$ என்ற வரி விதிக்கப்பட்டால், இதனால் ஏற்பட்ட புதிய சந்தைச் சமநிலை விலை, அளவு இவற்றை இயற்கணித முறைப்படி கணக்கிடவும்.

தீர்வு : வரி இல்லாதபோது

$$x = 16 - 2p \tag{1}$$

$$4x = 4p + p^2 \tag{2}$$

$(1) \times 4; \quad 4x = 64 - 8p$ **(3)**

$(2)-(3); \qquad 0 = 12p + p^2 - 64$

$$\therefore \; p^2 + 12p - 64 = 0$$

$$(p-4)(p+12) = 0$$

$p \neq -12$. எனவே $p = 4$

(1)ல் $p = 4$ எனச் சமனிட, $x = 16 - 2(4) = 8$

ஆதலால் சந்தைச் சமநிலை அளவு $x = 8$. விலை $p = 4$.

இப்போது $t = 2$ என்ற வரி விதிக்கப்பட்டபோது, தேவைச் சமன்பாடு மாருமல் முன்போல் இருக்கும் ஆனல் அளிப்புச் சமன்பாடு $4x = 4p + p^2$ என்பது

$$4x = 4(p-2) + (p-2)^2$$

எப்படியெனில் $p = F(x)$ என்ற அளிப்புச் சமன்பாடு $p = F(x) + 2$ என்ருவதுபோல $x = G(p)$ என்ற மறுவிதமான அளிப்புச் சமன்பாடு $x = G(p-2)$ என்ருகிறது.

எனவே சந்தைச் சமநிலை சமன்பாடு

$$4x = 64 - 8p = 4(p-2) + (p-2)^2$$

அதாவது $64 - 8p = 4p - 8 + p^2 - 4p + 4$

$$p^2 + 8p - 72 = 0$$

$$\therefore \; p = \frac{-8 + \sqrt{64 + 288}}{2} = 5{\cdot}38.$$

இந்த மதிப்பை $4x = 64 - 8p$-ல் சமனிட்டபின்

$$x = 16 - 10{\cdot}76 = 5{\cdot}24.$$

எனவே இயற்கணித முறைப்படி கிடைத்த புதிய சந்தைச் சமநிலை அளவு $x = 5{\cdot}24$; புதிய சந்தைச் சமநிலை விலை $p = 5{\cdot}38$ என்று அறிகிறோம்.

மாதிரி: தேவைச் சமன்பாடு $x = 10 - p$

அளிப்புச் சமன்பாடு $x = 2p - 5$ என்ருல்

(i) எவ்வளவு வரி விதித்தால் பொருளின் விலை 2 அலகுகள் கூடும் எனக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(ii) எந்த அளவு உதவிக் கொடை கொடுத்தால் விலை 1 அலகு குறையும் என்பதையும் கணக்கிடவும்.

சாதாரணமாக முதலில் சமநிலை அளவுகளைக் கணிக்க

$x = 10 - p = 2p - 5$ என்று கொண்டால்

$$3p = 15 \qquad p = 5$$

$$\therefore \quad x = 10 - p - 5.$$

சமநிலை மதிப்புகள் ($x = 5, \quad p = 5$).

(i) இப்போது பொருளின் விலை $p_1 = 5 + 2 = 7$ என்றால் t-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கலாம். எப்படி எளிதில் வரிவிதிப்பின்போது அளிப்புச் சமன்பாடு மட்டும் மாறுபடும். தேவைச் சமன்பாடு அப்படியே இருக்கும்.

எனவே,

$D: \quad x = 10 - p_1$ அதாவது $p_1 = 10 - 5$

$S: \quad x = 2p - 5$

$$p = \frac{x + 5}{2}$$

என்ற அளிப்புச் சமன்பாடு $t = t$ எனும்போது

$S: \quad p_1 = \dfrac{x + 5}{2} + t$ என்றாகிறது.

ஆகவே $p_1 \quad = 10 - x = \dfrac{x + 5}{2} + t$

இங்கு $p_1 = 7 = 10 - x = \dfrac{x + 5}{2} + t$

அதாவது $\quad 7 = 10 - x; \quad \dfrac{x + 5}{2} + t = 7$

$x = 3.$ எனவே, $\dfrac{3 + 5}{2} + t = 7$

அதாவது $\quad 4 + t = 7$

$$t = 3.$$

ஆதலால் $t = 3$ என்ற வரி விதிக்கப்படுகையில் பொருளின் விலை 2 அலகுகள் அதிகரிக்கிறது.

(ii) பொருளின் விலை 1 அலகு குறைந்தால் $p_2 = 5 - 1 = 4$ ஆகிறது. இவ்வாறு $p_2 = 4$ என்று இருக்க வேண்டுமானால் அரசாங்கம் எவ்வளவு உதவிக் கொடை அளிக்க வேண்டும் என்று இப்போது கண்டுபிடிப்போம். முன்போலவே தேவைச் சமன்பாடு மாறாது; அளிப்புச் சமன்பாட்டில் மட்டும் மாற்றம் இருக்கும். எப்படி எனில்

$$D: \; p_2 = 10 - x$$

$$S: \; p_2 = \frac{x+5}{2} - s$$

(இங்கு s என்பது உதவிக் கொடை என்க.)

$$p_2 = 4 \text{ என்றால் } \quad 10 - x = 4 \quad \underline{x = 6}$$

எனவே $$4 = \frac{x+5}{2} - s$$

$$= \frac{6+5}{2} - s = \frac{11}{2} - s.$$

எனவே $$s = \frac{11}{2} - 4 = \frac{3}{2}$$

∴ உதவிக் கொடையின் அளவு $s = \frac{3}{2}$ அலகு என இருக்க வேண்டும்.

மாதிரி: தேவை நியதி $3p + 2x = 27$

அளிப்பு நியதி $6p - 2x = 9$

என்றால், 20% வரி விதிக்கப்பட்ட பிறகு அரசாங்கத்திற்குக் கிடைக்கும் மொத்த வருவாய் என்ன?

தீர்வு: 20% வரி என்பது அப் பொருளின் விலையில் 5-ல் 1 பாகம். மேற்கூறிய நியதிகளை மாற்றி அமைத்து இவ்வரி விதிப்பின் பிறகு எழுதினால்,

$$p_1 = 9 - \frac{2}{3} x_1$$

$$p_1 = \left(\frac{3}{2} + \frac{x_1}{3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{2} + \frac{x_1}{3}\right)$$

இங்கு $$t = \frac{1}{5}(p) = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{2} + \frac{x_1}{3}\right)$$ என்று அறியவும்.

எனவே $$p_1 = 9 - \frac{2}{3} x_1 = \frac{6}{5}\left(\frac{3}{2} + \frac{x_1}{3}\right)$$ என்பதால்

$$= \frac{9}{5} + \frac{2}{5} x_1.$$

$$\frac{16}{15} x_1 = \frac{36}{5}$$

எனவே $x_1 = \frac{27}{4} = 6{\cdot}75$

$$p_1 = 9 - \frac{2}{3}\left(\frac{27}{4}\right) = \frac{9}{2} = 4{\cdot}5.$$

அளிக்கப்பட்ட (உற்பத்தியாக்கப்பட்ட) பொருள் x_1-க்கான

வரி $t = \frac{1}{5} p$ என்பதால்

$$t = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{2} + \frac{x_1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{3}{4}.$$

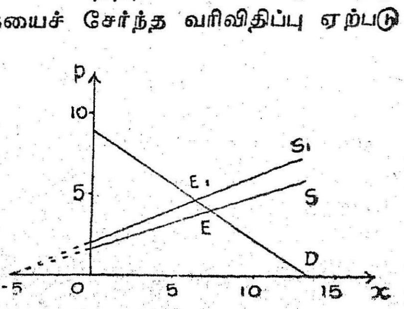
எனவே அரசாங்கத்துக்கு கிடைக்கும் மொத்த வருவாய் T என்ருல், $T = t. x_1$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{27}{4}$$

$$= \frac{81}{16}.$$

இதற்கான படவிளக்கம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. சமநிலை மதிப்புகளை அதன் மூலம் காணலாம்.

இதுபோல ஒரு நிலையான விகிதத்தில் விலை அதிகரித்து வந்தால், இரண்டாவது வகையைச் சேர்ந்த வரிவிதிப்பு ஏற்படுகிறது எனலாம். இது சதவீதத்தில் குறிக்கப்படும். (உதாரணமாக விற்பனை வரியைச் சொல்லலாம்.) அளிப்பு நியதி $p = F(x)$ என்ருல், γ என்பது வரி விகிதம் வரி வீதம் (tax rate) என்ருல், வரிக்குப்பின் அளிப்பு நியதி



படம் 12.

$$p_1\ p(1+\gamma) = F(x)(1+\gamma)$$

இந்த நியதியிலிருந்து கூட்டப்பட்ட வரியின் மதிப்பை $t = \gamma p = \gamma . F(x)$ என்று எழுதலாம்.

ஆகையால்,

$$t = \gamma p = \gamma . F(x) = \frac{\gamma p_1}{1+\gamma}$$

இதைப் பயன்படுத்தி ஷெ கேள்விகளுக்கு t-ன் மதிப்பைக் கண்டால்,

$$t = \frac{\gamma p_1}{1+\gamma} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{9}{2}}{\frac{6}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{4} \text{ ஆகும்.}$$

இரு பண்டங்களுக்கு வரி விதிப்பு (Taxation for two commodities)

இரண்டு சார்புடைய பண்டங்களுக்கு (பொருள்களுக்கு) தேவை நியதிகள் அவற்றின் விலைகளைப் பொருத்து அமையப் பெறின் மேலும் t_1, t_2 என்ற அளவு வரிகள் முறையே விதிக்கப்பட்டால், ஷெ ஆய்வே இதற்கும் பொருந்தும் என கீழே விளக்குவோம். தேவை அளிப்பு (சமன்பாடுகள்) சார்பலன்கள் இங்கும் ஒருபடிச் சார்பலன்களானுல், p, q மதிப்புகளை x, y-ன் மூலமாக எழுதலாம். வரிகள் விதிக்கப்பட்ட பின்னர், கிடைக்கும் நான்கு சமன்பாடுகளாவன :

$$p = p_0 - mx + ay \qquad (1)$$

$$q = q_0 + bx - ny \qquad (2)$$

$$p = P_0 + Mx + Ay + t_1 \qquad (3)$$

$$q = Q_0 + Bx + Ny + t_2 \qquad (4)$$

இங்கு p_0, q_0, m, n என்பனவும், P_0, M, Q_0, N என்பனவும் நேர் எண்களாகும்.

மாதிரி : முன்னர் எடுத்துக்காட்டாக விளக்கப்பட்ட ஒரு வினவையே எடுத்துக் கொள்வோம்.

இரு பண்டங்களின் தேவைச் சமன்பாடுகள்

$$D: \quad x = 5 - p + q$$

$$y = 10 - p - q.$$

அளிப்புச் சமன்பாடுகள்

$$S: \quad x = -5 + p + q$$
$$y = -2 - p + 2q$$

என்ருல் முதல் பண்டத்துக்கு $t_1 = \frac{1}{2}$ என்ற அளவு வரியும் இரண்டாவது பண்டத்துக்கு $s_1 = \frac{1}{2}$ என்ற அளவு உதவிக் கொடையும் அரசாங்கத்தால் விதிக்கப்படுகின்றன. இப்போது உண்டாகும் சந்தைச் சமநிலை அளவுகளையும், விலைகளையும் இரு பண்டங்களுக்கும் நிர்ணயித்து, அதன் பின்னர் அரசாங்கத்துக்குக் கிடைக்கும் நிகர வருவாயைக் காண்கவும்.

பக்கம் 32-ல் இந்த சமன்பாடுகளுக்கு s, t மதிப்புகள் தரப்படாததற்கு முன்பு தீர்வு காணப்பட்ட மதிப்புகள்,

$$q = 5 \qquad x = 4$$

$$q = 4 \qquad y = 1$$ என்பதாம்.

இப்போது t, s மதிப்புகளுடன் தீர்வு காண்போம்.

$$D: \quad p = \frac{1}{2}(15 - x - y); \quad q = \frac{1}{2}(5 + x - y)$$

$$S: \quad p = \frac{1}{3}(8 + 2x - y) + \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{3}(7 + x + y) - \frac{1}{2}$$

இவ்வடிவங்கள் எப்படி வருகிறது என்பதை பக்கம் 32-ல் காணவும். இதையே x, y மாறிகளை p, q-ன் மூலமாகவும் எழுதினுல்,

$$x = -5 + \left(p - \frac{1}{2}\right) + \left(q + \frac{1}{2}\right)$$

$$y = -2 - \left(p - \frac{1}{2}\right) + 2\left(q + \frac{1}{2}\right)$$

எனவே $x = 5 - p + q = -5 + p + q$

$$y = 10 - p - q = -\frac{1}{2} - p + 2q$$

$$2p = 10; \quad p = 5.$$

$$3q = \frac{21}{2}; \quad q = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \quad x = 5 - 5 + \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$$

$$y = 10 - 5 - \frac{7}{2} = \frac{3}{2}.$$

எனவே X பொருளின் சந்தைச் சமநிலை அளவு $x = \frac{7}{2}$

X பொருளின் சந்தைச் சமநிலை விலை $p = 5$

Y பொருளின் சந்தைச் சமநிலை அளவு $y = \frac{3}{2}$

Y பொருளின் சந்தைச் சமநிலை விலை $q = \frac{7}{2}$

அரசாங்கத்திற்கு கிடைத்த மொத்த வருவாய் $= T$

$$= 6x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{4}.$$

அரசாங்கத்திற்கு ஏற்பட்ட மொத்தச் செலவு $= S$

$$S = s \cdot y$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

எனவே, அரசாங்கத்திற்கு கிடைத்த நிகர வருவாய் (Net revenue)

$$= T - S = tx - sy$$

$$= \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = 1.$$

மாதிரி : ஒரு பண்டத்திற்கு அரசாங்கம் வரிவிதித்தால் அதன் விலை எப்போதும் அதிகரிக்கும். இரண்டு பண்டங்களுக்கும் வரிகள் விதிக்கப்பட்டால், எப்போதுமே இரு பண்டங்களின் விலைகளும் கூடும் என்று நிச்சயமாகச் சொல்வதற்கில்லை. சில சமயங்களில் இரு பொருள்களுக்கும் வரிவிதித்த பின்னரும், இரு பொருட்களின் விலைகளும் இறங்கிக் குறைவதைக் காணலாம் இதை எட்ஜ்வர்த்தின் முரணுரை (Edgeworth's Paradox) என அழைக்கிறோம்.

மாதிரி : இதை விளக்குவதற்காக ஹோட்டலிங்கின் எடுத்துக் காட்டைக் (Hotelling's Example) காண்போம்.

தேவை நியதிகள் :

$$D: \begin{array}{l} x = 4 - 10p + 7q \\ y = 3 + 7p - 5q. \end{array}$$

அளிப்பு நியதிகள் :

$$S: \begin{array}{l} x = 7 + p - q \\ y = -27 - p + 2q \end{array}$$

இவற்றை மாற்றி எழுதினுல் தேவை நியதிகள்

$$D: \begin{array}{l} p = 41 - 5x - 7y \\ q = 58 - 7x - 10y \end{array}$$

அளிப்பு நியதிகள் :

$$S: \begin{array}{l} p = 13 + 2x + y \\ q = 20 + x + y \end{array}$$ ஆகும்.

வரிகள் விதிக்கப்படுவதற்கு முன்பு இதே சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு கண்டால்

$$x = \frac{4}{13} \qquad p = \frac{219}{13}$$

$$y = \frac{42}{13} \qquad q = \frac{306}{13}$$

தேவைச் சமன்பாடுகள் எல்லா p, எல்லா q மதிப்புகளுக்கும் இயல்புடையவையாக உள்ளன. மேலும் $y < \frac{41}{7}$, $x < \frac{58}{7}$ என்ற சமமின்மைகளுக்கு ஒத்திருந்தால் இந்த தேவைச் சமன்பாடுகள் இயல்புடையவையாகும்.

இதேபோல அளிப்புச் சமன்பாடுகள் இயல்புடையவையாக இருப்பதற்கான நிபந்தனைகள்

(i) $q > 7$ ($7-q$ எதிர் மறையாக இருப்பதற்காக)

(ii) எல்லா p, எல்லா x, எல்லா y மதிப்புகளுக்கும் இச் சமன்பாடுகள் இயல்புடையவை.

இப்போது சந்தைச் சமநிலை விலைகள், அளவுகளை ஒப்பிடும் போது $q = \frac{306}{13} > 7$ ஆக இருப்பதைக் காண்கிறோம். மேலும் $x, y, p, q > 0$ என்பதாலும் மற்ற நிபந்தனைகளும் இங்கு பூர்த்தி செய்யப்படுவதாலும் இத் தீர்வு ஒரு பொருளுடைய தீர்வாகும் (significant solution).

இப்போது முதல் பண்டத்துக்கு $t_1 = 13$ என்ற வரியும், இரண்டாவது பண்டத்துக்கு $t_2 = 0$ பூஜ்யம் வரியும் விதிக்கப் படுகிறது எனக் கொள்வோம்.

எனவே புதிய அளிப்பு நியதிகள்

$$x = 7 + (p - 13) - q$$

$$y = -27 - (p - 13) + 2q \text{ என்று ஆகும்.}$$

இப்போது புதிய சமநிலை மதிப்புகளைக் காண்பதற்கு,

$$x = 4 - 10p + 7q = -6 + p - q$$

$$y = 3 + 7p - 5q = -14 - p + 2q$$

அல்லது,

$$-11p + 8q = -10 \qquad (A)$$

$$8p - 7q = -17 \qquad (B)$$

$$(A) \times 7 \qquad -77p + 56q = -70 \qquad (C)$$

$$(B) \times 8 \qquad 64p - 56q = -136 \qquad (D)$$

$$(C) + (D): \qquad -13p = -206$$

$$p = \frac{206}{13}.$$

(A)-ல் $p = \frac{206}{13}$ என்று சமனிட்டால்,

$$8q = -10 + \frac{2266}{13} = \frac{2136}{13}$$

$$q = \frac{267}{13}.$$

X-ன் புதிய சமநிலை விலை p பழைய விலையைவிட 1 குறைந்து காணப்படுகிறது. மேலும் Y-ன் புதிய சமநிலை விலை q, பழைய விலையைவிட 3 குறைந்து காணப்படுகிறது.

மாதிரி : மேற்கூறிய மாதிரியில் (ஹோட்டலிங்கின் எடுத்துக் காட்டு) $t_1 = 5$, $t_2 = 1$ என்றால் புதிய சமநிலை மதிப்புகள் எந்த அளவுக்கு விலைகளை மாற்றியுள்ளன என்று காணவும்.

$$x = 7 + (p-5) - (q-1)$$

$$y = -27 - (p-5) + 2(q-1)$$

என்பன புது அளிப்பு நியதிகள்.

எனவே புதிய சமநிலைச் சமன்பாடுகள்

$$x = 4 - 10p + 7q = 3 + p - q$$

$$y = 3 + 7p - 5q = -24 - p + 2q$$

அல்லது,

$$-11p + 8q = -1 \qquad (A)$$

$$8p - 7q = -27 \qquad (B)$$

$$(A) \times 7 \qquad -77p + 56q = -7 \qquad (C)$$

$$(B) \times 8 \qquad 64p - 56q = -216 \qquad (D)$$

$$(C) + (D): \qquad -13p = -223$$

$$p = \frac{223}{13}.$$

(A)-ல் $p = \frac{223}{13}$ என்று சமனிட

$$8q = -1 + 11 \times \frac{223}{13}$$

$$= \frac{2453 - 13}{13} = \frac{2440}{13}$$

$$\therefore \quad q = \frac{305}{13}.$$

p-ன் மதிப்பு $\frac{219}{13}$-லிருந்து $\frac{223}{13}$ என்று அதிகரித்து இருக்கிறது.

q-ன் மதிப்பு $\frac{306}{13}$-லிருந்து $\frac{305}{13}$ ஆகக் குறைந்திருக்கிறது.

பயிற்சிகள்

கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொரு கேள்விக்கும், வடிவகணித முறைப் படியும், இயற்கணித முறைப்படியும் சந்தைச் சமநிலை விலையும் அளவும் கணக்கிடவும். இயற்கணித தீர்வு காண்பதற்கு முன்னதாக வடிவ கணிதத் தீர்வைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

	தேவை	அளிப்பு
1.	$x = 16 - 2p$	$4x = 4p + p^2$
2.	$x = 130 - 4p$	$p = 10 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{100}$
3.	$x = \sqrt{36 - p}$	$p = 6 + \frac{x^2}{4}$
4.	$x = 64 - 8p - 2p^2$	$x = 10p + 5p^2$
5.	$p = 39 - 3x^2$	$p = (x + 2)^2$

6. தேவை நியதி $(x + 6)(p + 12) = 144$;

அளிப்பு நியதி $p = 2 + \frac{x}{2}$ என்றால்

இயற்கணித முறையிலும் வடிவகணித முறையிலும் சமநிலை விலையையும் அளவையும் கணக்கிடவும்.

வடிவகணித முறையில் மட்டுமே, கீழ்க்கண்ட 2 வினாக்களின் நியதிகளுக்கு சமநிலை மதிப்புகளை நிர்ணயிக்கவும்.

7. தேவை நியதி $p = \frac{30}{x}$

அளிப்பு நியதி $p = 3 + \frac{x^2}{4}$

8. தேவை நியதி $p = \frac{300}{x + 10} - 20$

அளிப்பு நியதி $p = 4 + \frac{x^2}{2}$

9. தேவைச் சமன்பாடு $p = 4 - 2x$;

அளிப்புச் சமன்பாடு $p = 2 + x$ என்றால்

(a) $t = \frac{1}{2}$ (ஒரு அலகுக்கு) என்ற வரி விதித்தால், அப் பொருளின் விலை அதிகரிப்பு எவ்வளவு எனக் காண்க. அத்துடன் அரசாங்கத்துக்குக் கிடைக்கும் மொத்த வருவாயையும் கணக்கிடுக.

(b) $s = \frac{1}{2}$ (ஓர் அலகுக்கு) என்ற உதவிக் கொடை கொடுத்தால் விலை எவ்வளவு குறையும்? என்றும் அரசாங்கச் செலவு எவ்வளவு? என்றும் கணக்கிடுக. தீர்வுகளை வடிவ கணிதத்தில் வரைந்து காட்டுக.

10. தேவைச் சமன்பாடு $p = 10 - 2x$;

அளிப்புச் சமன்பாடு $p = \frac{3}{2}x + 1$ என்ருல்,

(a) ஓர் அலகுக்கு கூடுதல் வரி $t = 2$ என்று விதிக்கப் பட்டால் சமநிலை மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(b) ஓர் அலகுக்கு உதவிக் கொடை $s = 1$ என்று அளிக்கப் பட்டால், சமநிலை மதிப்புகள் என்னவாக இருக்கும்? வடிவகணித முறையில் விளக்குவதற்காக வரைபடம் வரைக.

11. கேள்வி 10-ல் உள்ள இரு சமன்பாடுகளைக் கவனிப் போம். இப்போது 25% விற்பனை வரி விதிக்கப்பட்டால், புதிய சமநிலை விலை, அளவு இவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும். வரை படத்தின் மூலமும் இதைத் தெளிவாக்கவும்.

12. தேவை, அளிப்புச் சமன்பாடுகள் முறையே

$$3p + 2x = 27$$

$$6p - 2x = 9$$ என்று கொள்வோம்.

t வரி விதிக்கப்பட்டால், விலையில் ஏற்படும் ஏற்றம் $\frac{2}{3}t$ என்ற மதிப்புக்குச் சமமாக இருக்கும் என்று நிரூபிக்கவும்.

13. $x = 130 - 4p$ என்பது தேவை நியதி

$$p = 10 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{100}$$ என்பது அளிப்பு நியதி

இப்போது

(a) $t = 5$ என்று வரி விதிக்கப்பட்டால்,

(b) $s = 5$ என்ற உதவிக் கொடை அளிக்கப்பட்டால்,

இரு சமயங்களிலும் உண்டாகும் புதிய சந்தைச் சமநிலை விலை, அளவு மதிப்புகள் யாவை ?

14. தேவை, அளிப்பு நியதிகள் முறையே

$$p = 39 - 3x^2; \quad p = 9x + 9 \text{ என்றால்,}$$

(a) எந்த அளவு வரியானது சமநிலை விலையை 3 அதிகமாகக் கூட்டும் ?

(b) எந்த அளவு உதவிக் கொடை கொடுத்தால் சந்தைச் சமநிலை விலை 3 குறைவாகக் காட்டும் ?

15. இரு பண்டங்களுக்கான இரு தேவைச் சமன்பாடுகள்

$$x = 4 - 2p + q$$
$$y = 20 + p - 5q$$

அவற்றின் இரு அளிப்புச் சமன்பாடுகள்

$$x = 4p$$
$$y = -1 + 6q \text{ என்று கொள்க.}$$

முதல் பொருளுக்கு $t_1 = \frac{1}{2}$; இரண்டாவது பொருளுக்கு $t_2 = \frac{2}{3}$ என்று வரிகள் விதிக்கப்படுகின்றன. விலைகளில் முன்னைக்கு இப்போது ஏற்படும் மாற்றங்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

16. தேவை நியதிகள்

$$p = 4 - x + y$$
$$q = 4 + x - 2y$$

அளிப்பு நியதிகள்

$$4p = 7 + 2x - y$$
$$2q = y + 1$$

$t_1 = 1, t_2 = 1$ என்று வரிகள் இரு பொருள்களுக்கும் முறையே விதிக்கப்பட்டால், புதிய சந்தைச் சமநிலை விலைகளையும் அளவுகளையும் கண்டுபிடிக்கவும். மேலும் பழைய சமநிலை மதிப்புகளுடன் ஒப்பிட்டு விலைகளிடையேயுள்ள மாற்றத்தைக் கணக்கிடவும்.

17. தேவை நியதிகள் : $p = 54 - x - 2y$

$$q = 77 - x - 3y$$

அத்துடன் அளிப்பு நியதிகள் $x = -6 + 2p - q$

$$y = -3 - 3p + 2q$$

என்று கொள்க.

முதல் பொருளுக்கு t_1 வரியும், இரண்டாம் பொருளுக்கு t_2 வரியும் விதிக்கப்படுகின்றன. அப்படியாயின் புதிய சந்தைச் சமநிலை விலைகளையும் புதிய சந்தைச் சமநிலை அளவுகளையும் t_1, t_2 இவற்றின் வாயிலாகக் கண்டுபிடித்து எழுதவும். அத்துடன் $t_2 = 0$ என்றால், t_1 என்ற வரி விதிப்பினால், இரு பொருள்களின் விலைகளும் குறைகின்றன என்று நிரூபித்துக் காட்டுக.

4. சார்புடை விலை மதிப்புகள்

(Inter-related Values)

பொதுவான விலை நிர்ணயக் கோட்பாட்டில், மற்றப் பொருட்களோடு தொடர்பு பெருத நிலையில் ஒரு பொருளைக் கருதினோம். ஆனால், உண்மையில், தேவை நிலையிலோ அல்லது அளிப்பு நிலையிலோ பொருட்கள் பலவும் ஒன்றோடொன்று தொடர்பு கொண்டவைகளாக (inter-related)அமைகின்றன. பல பொருட்கள் இணையாகத் தேவைப்படலாம். வருவாய் நிலையானதாக அமைவதால், பலவகைத் தேவைகளிடையே சிறந்தனவற்றைத் தெரிவு செய்யவேண்டிய நிலையில் இருக்கிறோம். இதேபோல் இணையாக அளிக்கப்படும் பொருள்களும் பல உண்டு. உற்பத்திக் காரணிகள் கிடைக்கும் அளவில் குறைந்தனவாக அமைவதால், (scarce), அளிப்புகளும் தம்முள் ஒன்றோடொன்று தொடர்பு கொண்டுள்ள நிலையினைக் காண்கிறோம்.

இங்கு விரிவாக நான்கு நிலைகளில் விலை நிர்ணயித்தலைக் கருதுகிறோம். அவையாவன :

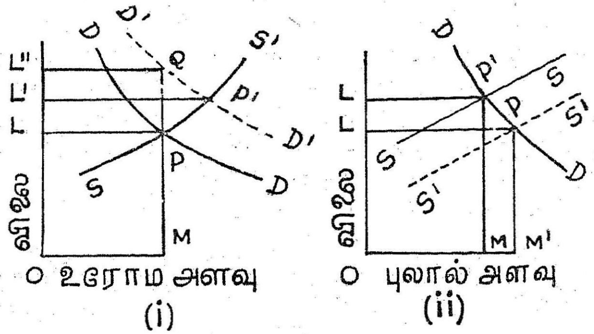
(i) இணைப்பு அளிப்பு (Joint supply)
(ii) இணைப்புத் தேவை (Joint demand)
(iii) தொகுப்பு அளிப்பு (Composite supply)
(iv) தொகுப்புத் தேவை (Composite demand)

இணைப்பு அளிப்பு

இரண்டு மூன்று பொருட்கள் ஒரே சமயத்தில் உற்பத்தியாகும் நிலையில், இணைப்பு பண்டங்கள் பெறப்படும். உதாரணமாக, பஞ்சு உற்பத்தியாகும் நிலையில், பருத்தி விதை எனும் துணைப் பண்டமும் உடன் கிடைக்கும். ஆடுகளிலிருந்து புலால் மட்டுமல்லாது, உரோமமும் உடன் கிடைக்கிறது. நிலக்கரி உலையில் எடுக்கப்படும் சுடப்பட்ட நிலக்கரி (coke) முதன்மைப் பொருளா

கவும், அதிலிருந்து கிடைக்கும் ஆவி (gas) பக்கப் பொருளாகவும் அமைகின்றன.

இவ்வாறு சில பொருட்கள் இணைந்து உற்பத்தியாகும் நிலையில் அவைகள் குறிப்பிட்ட ஒரு விகிதாசாரத்தில் விளையலாம். இவ் விகிதாசாரம் மாறாத நிலையில், ஒவ்வொரு பொருளின் விலை மதிப்பும் அதனுடைய தேவை மற்றும் அளிப்பு விதிகளின் மூலமாக நிர்ணயிக்கப்படும். ஆனால், நீண்ட காலத்தில் (l ng run) நிர்ணயமாகும். இயல்பான (normal) விலையானது, இணைப்புப் பண்டங்களின் விலைகளின் கூட்டு மதிப்பானது அவற்றுக்கான இறுதிநிலைச் செலவின் அளவிற்கு உயர்ந்ததாக அமையத்தக்க விதத்தில் இருத்தல் வேண்டும். ஒரு பண்டத்தின் விலையானது அதிகரிக்கையில், மற்றொன்றின் விலை குறையக் காணலாம். ஏனெனில், கோதுமை உற்பத்தி அதிகரிக்கையில், அதன் மூலம் கிடைக்கும் வைக்கோல் அளிப்பு அளவும் அதிகமாக, அதன் விலை குறையும்.



படம் 13.

ஆனால், இணைப்புப் பொருட்களின் விகிதாசாரமானது மாற்றப்படுகையில், அவற்றின் தனித் தனியான உற்பத்திச் செலவுகளைக் கண்டறிய முடியும். இங்கு, ஒரு பொருள் விலை அதிகரித்தால், மற்றொன்றின் விலை குறைவதில்லை. உதாரணமாக, கம்பளி ஆடைகட்கு (wool) தேவை அதிகரிக்கும் நிலையில், உரோமத்தின் (wool) அங்காடி விலை அதிகமாக, நிறைய ஆடுகள் பயன்படுத்தப்படும். தொடர்ந்து, புலால் அளிப்பு அளவும் அதிகரிக்கிறது. புலால் தேவை நிலையாய் இருக்க, அதனுடைய விலையைக் குறைக்க வேண்டிய அவசியம் ஏற்படுகிறது. மேலேயுள்ள விளக்கப்படத்தில் இதனைக் காணலாம்.

DD என்பது உரோமத்தில் முதல் தேவை வளைவு. *OM* அளவு உற்பத்தியாகும். விலை *PM* என்பது ரோமத்தின் தேவை அதிகமாக, அதன் விலையும் அதிகரிக்கும். அதாவது, விலை *QM* அளவுக்கு அதிகமாகும்.

2-வது படத்தில், *DD* → முதல் தேவை வளைவு (புலாலிற்கு); *SS* என்பது அளிப்பு வளைவு. ரோமத் தேவை *D'D'*-க்கு அதிகமாக, அதன் உயர்ந்த விலையானது, மேலும் ஆடுகளை வளர்க்கத் தூண்டுகோலாய் அமையும்.

∴ உடன் விளைவாக, புலால் அளிப்பு அதிகரிக்கும். அதன் விலையானது *PM*-க்குக் குறையும்.

ஆனால், புதுவகையான ஆடுகளை உண்டாக்குவதன்மூலம், அதிக விகிதத்தில் உரோமம் கிடைக்கும் நிலையில் (Cross breeding), அதன் அளிப்பு அளவினை மிகவும் அதிகப்படுத்த இயலும். இந் நிலையில், புலால் விலை முன்புபோல அதிகம் குறைவதில்லை. சில நிலைகளில், ஒவ்வொரு பொருளின் இறுதிநிலை உற்பத்திச் செலவையும் தனியாகக் கண்டறிய இயலும்பொழுது, அவற்றை தனித்த பொருட்களாகக் கொண்டு விலையினை நிர்ணயிக்கலாம். தற்காலச் சூழ்நிலையில், பக்கப் பண்டங்கள் பற்றிய கருத்தானது விலைக்கோட்பாட்டில் முக்கிய இடம் வகிக்கிறது.

இணைப்புத் தேவை

இங்கு இருவகைத் தொடர்புகளைக் காணலாம். முதலாவது, இணையாக வாங்கப்படும் பண்டங்கள் (Complementary) பதிலீட்டுப் பண்டங்கள் (Competitive or substitutive) என்பது இரண்டாவது வகை.

முதல் வகையில், பொருள்கள் இணையாகத் தேவைப்படுகின்றன. உதாரணமாக, குதிரையும் வண்டியும் ஒன்றாகவே வாங்கப்படுகின்றன. இரண்டு தேவைகளும் ஒரே சமயத்தில் பூர்த்தி செய்யப்படல் வேண்டும். இரண்டாம் வகையில், ஒரு பொருளிற்குப் பதிலீடாக (substitutive) இன்னொன்றை பயன்படுத்தும் நிலையைக் காண்கிறோம். உதாரணமாக, தேநீர், காபி இரண்டில் ஒன்றைப் பயன்படுத்துவது பானத் தேவையை பூர்த்தி செய்யும்.

இரு பொருட்கள் (அல்லது பல) இணையாகத் தேவைப்படும் நிலையை கருதுவோம். ஒவ்வொன்றும் ஒரே அளவு முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகக் கருதப்படுகிறது. உதாரணமாக, எழுதுகோல்,

(pen), மசி இவை வாங்கப்படும் நிலையில், ஒன்றின் தேவை அதிகமாகும்போது, மற்றொன்றின் தேவை அளவும் உடன் அதிகரிக்கும். ஒன்றின் விலை குறைகையில், இரண்டின் தேவைகளும் அதிகரிக்கும். எழுதுகோல் விலை குறைந்தால், மசியின் விலை அதிகரிக்கும். அதன் தேவை அதிகரிக்கிறது. இவற்றின் விலைகளில் ஏற்படும் மாறுபாடுகள், எழுதுகோலின் தேவை நெகிழ்ச்சி அளவு மற்றும் மசியின் அளிப்பு இவற்றைப் பொறுத்தது.

வீடுகளின் தேவை அதிகரிக்கையில், அவற்றின் விலைகள் உயர்கின்றன. இதற்கு இணையாக, வீடுகட்ட பயன்படும் மூலப் பொருள்கள் (செங்கல், சிமெண்ட் போன்றவை) விலைகளிலும் மாறுதல் ஏற்படும். இம்மாறுதல்கள் அவற்றின் அளிப்பு நிலையினைப் பொறுத்து அமையும். மேலும், அப் பொருட்களின் கலப்பு விகிதத்தை மாற்றுவதன்மூலம், சிலவற்றின் தேவையை அதிகப் படுத்த, அல்லது குறைக்கமுடியும். கிடைத்தற்கு அரிய பொருட்களின் விலையில் அதிக உயர்வு ஏற்படும். சிலவற்றிற்கு, பதிலீட்டுப் பொருட்கள் அமைவதால், அவற்றின் விலைகள் அவ்வளவாக அதிகரிப்பது இல்லை. சிலவற்றின் செலவு மொத்தச் செலவின் ஒரு சிறு பகுதியாய் அமைந்திருப்பின், அவற்றின் விலை எந்த அளவிற்கும் அதிகரிக்கலாம். உழைப்பு போன்ற காரணிகள் விகிதம் அதிகமாய் இருப்பதால், அவற்றின் விலை அதிக அளவில் உயருவது சாத்தியமில்லை.

பொதுவில், உற்பத்திக்குத் தேவைப்படும் முதற்பொருட்களின் இறுதிநிலை பயனுக்குத்தக்க அளவில் அவற்றின் (இணைப்புப் பொருட்களின்) விலைகள் தீர்மானிக்கப்படுகின்றன. நீண்டகால அளவில், ஒவ்வொரு பொருளும் அதன் விலையானது இறுதிநிலைச் செலவுக்கு சமமாக அமையத்தக்க விதத்தில் பயன்படுத்தப் பட வேண்டும்.

சில நிலைகளில், தொகுப்பில் உள்ள எந்த ஒரு பொருளின் இறுதிநிலைப் பயனையும் தனியாகக் கண்டறிவது இயலுகின்றது. இதையே, மற்றவை நிலையாக வைக்கப்படுமெனக் கொண்டு, இறுதிநிலை உற்பத்தித் திறனைக் காண்கிறோம்

பொதுவாக, இறுதிப் பண்டத்தின் விலையானது, அதன் அளிப்புக்கு ஏற்ற தேவை நிலையினைப் பொறுத்து அமையும் எனக் கருதுவோம். ஆனால் நீண்டகால அளவில், அந்த விலையானது அதை உற்பத்தி செய்யப் பயன்படுத்தப்பட்ட பொருட்களின் (factors) அளிப்பு விலைகளை உள்ளடக்கக் கூடிய விதத்தில் நிர்ணயிக்கப்படல் வேண்டும்.

பதிலீட்டுப் பொருட்களில், ஒன்றின் விலை உயர்வு மற்றொன்றின் தேவையினை அதிகரிக்க, அதன் விளைவாகப் பொருளின் விலையும் அதிகரிக்கிறது. இத் தொடர்பை, குறுக்கீட்டு நெகிழ்ச்சி (cross (elasticity) என்பதன் மூலமாகக் குறிப்பிடலாம்.

$$\text{குறுக்கீட்டு நெகிழ்ச்சி} : \frac{\text{பதிலீட்டுப் பொருள் தேவை மாறுபாடு}}{\text{பொருளின் விலை மாறுபாடு}}.$$

(மாறுபாடுகள் விகித அளவுகளில்)

இணைப்புத் தேவை நிலையில், ஒரு பொருளின் அளிப்பினைக் குறைப்பதன் விளைவாக (உற்பத்தியில்), அதன் விலை மதிப்பானது அதிகரிக்க வழியுண்டு. உழைப்பு அளிப்பு அளவு குறைக்கப் படுவதானது, இறுதியில் ஊதிய உயர்வினைப் பெற வழி செய்கிறது. அது மிக முக்கிய காரணியாய் அமைவதனுல், இந்நிலை காணப் படும். மற்றக் காரணிகளின் தேவை அளவு குறைக்கப்படல் வேண்டும்.

தொகுப்பு அளிப்பு (Composite supply)

பல வழிகளில் அளிக்கப்படும் பொருட்களை இவ்வாறு கூறு கிறோம். ஏனெனில் இவற்றின் அளிப்பானது, பல வழிகளில் கிடைக்கும் அளிப்புக்களின் மொத்தமான அளவாக அமைகிறது. உதாரணமாக, உப்பானது (salt) உப்பளங்களிலிருந்தும், கடல் நீர் வற்றச் செய்யப்படுவதன் மூலமும் கிடைக்கிறது. ஆனுல் முக்கியமாக, பதிலீட்டுப் பொருட்களையே கருதுவோம். தேநீர், காபி போன்றவைகளும் இங்கு உதாரணமாய் அமையும். இத்தகைய பொருட்களின் விலை மதிப்புகள் ஒரே திசையில் நகர் வனவாய் அமைந்திருக்கின்றன. ஒன்றின் விலை மற்றொன்றின் விலையுடன் தொடர்புள்ளதாய் அமைகிறது. உதாரணமாக, கோதுமை விலை அதிகரிக்கையில், அதற்குப் பதிலாக மக்கள் அரிசியைப் பயன்படுத்துவதாகக் கொண்டால், அரிசியின் விலையும் உடனடியாக உயருவதைக் காணலாம். இதேபோல், விலை குறைவும் அமையும். பதிலீட்டுப் பொருட்களின் மொத்தத் தேவை அளவுக்கேற்ப அமையும் அளிப்பு நிலையைப் பொறுத்து அவற்றின் விலைகள் நிர்ணயிக்கப்படும். விலைகள் அனைத்தும் ஒரே மாதிரியாக மாறுகின்றன. நீண்டகால அளவில், இறுதிநிலைச் செலவிற்கு, அப்பொருளின் இறுதி நிலைப் பயன் சமமாக அமையு மென்ற நியதிப்படி, விலைகள் நிர்ணயமாகும்.

தொகுப்புத் தேவை (Composite demand)

ஒரு பொருளானது பல பயன்களைப் பெற்றிருக்கும் நிலையில், அப்பொருளின் மொத்த (aggregate) தேவை இவ்வாறு கூறப்படும். இந்த மொத்தத் தேவை அளவானது, அதன் பலவகை உபயோகங்களை உள்ளிட்ட ஒன்றாகும். உதாரணமாக, நிலக்கரியானது, இரயில் எஞ்சின்கள், தொழிற்சாலை உலைக் களம், சமையல் போன்ற பல்வகைகளில் பயன்படுத்தப்படும். இத்தகை எல்லாப் பயன்களுக்கும் அதன் விலையானது ஒன்றாகவே அமையும். உதாரணமாக, இரயில் வண்டிகளில் அதிகம் நிலக்கரி தேவைப் படுகிற நிலையில், நிலக்கரியானது அங்கு மிகுதியாகப் பயன் படுத்தப்படும். மற்றத் தேவைகட்கு அளிக்கப்படும் அளவு குறைவதால், அவைகட்கு அதன் விலை அதிகரிக்கும். ∴ இந் நிலையில், பொருளின் விலையானது, அதன் பலவகைப் பயன்களில் உள்ள இறுதிநிலைப் பயன் நிலையினைப் பொருத்ததாகும். பொரு ளானது ஒரு உபயோகத்திலிருந்து மற்றொன்றிற்கு மாறும் தன்மை உடையதாக இருப்பதால், இறுதிநிலைப் பயன் மாறுதிருக்கும். நீண்ட கால அளவில், அதன் விலையானது இறுதிநிலைச் செலவினை உள்ளடக்கியதாய் இருத்தல் இன்றியமையாதது.

5. வகையீட்டுக் கெழுக்கள்

(Derivatives)

இக் கருத்து, பலவாருகப் பொருளாதாரப் பிரச்சினைகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. y என்ற ஒரு தொடர் மாறியினையும் x என்ற மற்ரெரு தொடர் மாறியினையும் கருதுவோம். x தனித்த மாறி. y அதனைச் சார்ந்தது. $y = f(x)$ என்ற சார்பினைக் கருதுகிறேம். x-ல் ஏற்படும் மாற்றத்திற்கேற்ப, y எந்த விதத்தில் மாறும் (rate of change) என்பதைக் கண்டறிவதே வகை வேறுபாட்டுக் கணித அடிப்படை நோக்கமாகும். அதிகரிப்பு அல்லது குறைவு விதத்தினை அனுமானிப்பது பிரச்சினையாகும்.

$y = f(x)$ என்பது ஒற்றை மதிப்புடைய, தொடர் மாறி எனில், x என்பது $x + \Delta x$ என அதிகரிக்கையில், y-ன் அதிகரிப்பு விதம்

$\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ என்பது ஒரு நிச்சயமான எல்லை மதிப்பினை, $\Delta x \to 0$ என்ற நிபந்தனையில், அடையுமாகுல், இச் சார்பு x என்ற புள்ளியில் வகைவேறுபாட்டுக் கெழுவினைப் பெற்றிருப்பதாக வரையறுக்கிறேம். இதனை,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

என எழுதுகிறேம். Δx மிகச் சிறியதாய் அமைகையில், இது ஒரு எல்லை வரையறையை அடையும்.

மேலும் $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx} \cdot f(x)$ என்றும் குறிப்பிடலாம்.

($f'(x)$ எனவும் குறிக்கலாம்.)

வரைகணித முறைப்படி, $y = f(x)$ என்ற வளைவின் ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சரிவானது (tangent gradient) $y' = f'(x)$ சார்பின் வகைவேறுபாட்டுக் கெழு மூலம் மதிப்பிடப்படுகிறது.

பின்வரும் சூத்திரங்கள், பல நிலைகளில் உதவும் தன்மையன :

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1} \qquad (4{\cdot}1)$$

(n மாறிலி)

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(x^2) = 2x; \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2};$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

(Sum or difference) இரு சார்புகளின் கூட்டுத் தொகை அல்லது வேறுபாடு

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \qquad (4{\cdot}2)$$

(u, v, → x-ன் சார்புகள்)

சார்புகளின் பெருக்கம் :

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx} \qquad (4{\cdot}3)$$

சார்புகளின் விகிதம் :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2} \qquad (4{\cdot}4)$$

மாறிலி :

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \quad (c \text{ மாறிலி}) \qquad (4{\cdot}5)$$

ஒரு சார்பினைச் சார்ந்த இன்னொரு சார்பு : (4·6)

y, u வினைச் சார்ந்தும், u ஆனது x-ஐச் சார்ந்தும் இருப்பின்;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ என ஆகும்.}$$

மறுதலைச் சார்பு :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \tag{4 7}$$

உதாரணங்கள்

(i) $\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$; $\frac{d^2}{dx^2}(x^4) = 12x^2$; $\frac{d^3}{dx^3}(x^4) = 24x$.

$\frac{d^4}{dx^4}(x^4) = 24$; $\frac{d^5}{dx^5}(x^4) = 0$

இங்கு படிப்படியாக வகையிடுகையில், சார்பின் படியானது (degree) குறைந்துகொண்டே வருவது குறிப்பிடத்தக்கது.

(ii) $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$

$$= \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(iii) $\frac{d}{dx}[(x - 2)(2x + 1)]$

$$= (x - 2)\frac{d}{dx}(2x + 1) + \frac{d}{dx}(x - 2)$$

$$= 2(x - 2) + 1 \cdot (2x + 1)$$

$$= \underline{4x - 1}$$

(iv) $\frac{d}{dx}\left[\frac{1 + 2x}{1 - x + 2x^2}\right]$

$$= \frac{(1 - x + 2x^2)\frac{d}{dx}(1 + 2x) - (1 + 2x) \cdot \frac{d}{dx}(1 - x + 2x^2)}{(1 - x + 2x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1 - x + 2x^2) - (4x - 1)(1 + 2x)}{(1 - x + 2x^2)^2}$$

$$= \frac{3 - 4x - 4x^2}{(1 - x + 2x^2)^2}.$$

(v) $\frac{d}{dx}(\sqrt{9 - x^2}) = \frac{d}{dx}(9 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{2}(9 - x^2)^{\frac{1}{2} - 1} \times \frac{d}{dx}(9 - x^2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{9 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

(vi) $\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{2x + 1}{2x - 1}\right)^2\right]$

$$= 2\left(\frac{2x + 1}{2x - 1}\right)^{2-1} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2x + 1}{2x - 1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{2x + 1}{2x - 1}\right) \cdot \frac{(2x-1)\frac{d}{dx}(2x+1) - (2x+1)\frac{d}{dx}(2x-1)}{(2x - 1)^2}$$

$$= 2\left(\frac{2x + 1}{1x - 1}\right) \cdot \frac{2(2x-1) - 2(2x+1)}{(2x - 1)^2}$$

$$= -8 \cdot \frac{(2x + 1)}{(2x - 1)^3}.$$

(vii) $y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - 2x}}$.

$u = \frac{1 + x}{1 - 2x}$ என, $y = \sqrt{u}$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}\sqrt{u} \cdot \frac{d}{du}\left(\frac{1 + x}{1 - 2x}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{(1 - 2x)\frac{d}{dx}(1 + x) - (1 + x)\frac{d}{dx}(1 - 2x)}{(1 - 2x)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{(1-2x) + 2(1+x)}{(1-2x)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-2x}}} \cdot \frac{3}{(1-2x)^2}$$

$$: \frac{\sqrt{1-2x}}{2\sqrt{1+x}} \cdot \frac{3}{(1-2x)^2}$$

$$: \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}\,(1-2x)^3}$$

பொருளாதாரத்தில் வகை வேறுபாடுகளின் பயன் (Application of derivatives)

பொருளாதாரத்தில், பல்வேறு மாறிகளினிடையே உள்ள தொடர்பை. கணிதச் சார்புகள் மூலம் குறிப்பிடுகிறோம். உதாரணமாக, பொருளின் தேவைக்கும், விலைக்கும் உள்ள தொடர்பு, தேவைச் சார்பின் மூலம் தரப்படும். அதாவது, $x = \phi(p)$ என்க. இந்தச் சார்பு தொடர்ச்சியானதாக (continuous) கருதப்படுவதால் இதனுடைய வகை வேறுபாட்டுக்கெழுவினைப் பெற இயலும். அதாவது, $\frac{dx}{dp} = \phi'(p)$. தேவை வளைவின் தொடு கோட்டின் சாய்வானது இதன் மதிப்பைத் தருவதாக அறிகிறோம்.

பொதுவாக, X என்ற ஒரே அளவினில் ஏற்படும் மாற்றத்திற்கு ஏற்ப, Y என்ற மற்றொன்றில் நிகழும் மாற்றத்தினை இரு வகைக் கருத்துக்களாக அமைந்திருப்பதெனக் காண்கிறோம். (i) சராசரி என்ற கருத்து; (ii) இறுதிநிலை என்ற கருத்து சராசரியானது, ஒரு எல்லைக்குள் அமைந்த Xன் மதிப்புகளைக் கருதி. அதன் மூலம் Y-ன் மாறுபாட்டினை மதிப்பிடலைக் குறிக்கும். பொதுவாக, X-ன் மதிப்பை பூஜ்யத்திலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மதிப்பு வரையில் கருதுகிறோம். உதாரணமாக, சராசரி உற்பத்திச் செலவானது, மொத்தச் செலவினை மொத்த உற்பத்தியால் வகுப்பதன் மூலம் கிடைப்பதாகும்.

மாறுக, இறுதிநிலைக் கருத்தானது, X-ன் இறுதிநிலையில் நிகழும் Y மாறுபாட்டினைப் பற்றியதாகும். அதாவது, கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பிலிருந்து ஏற்படும் சிறு மாற்றங்களை மட்டும் கருதுவதாகும். உதாரணமாக, கொடுக்கப்பட்ட உற்பத்தி அளவு நிலையில், இறுதிநிலைச் செலவானது, உற்பத்தி அந்த நிலையிலிருந்து மிகச் சிறு அளவு அதிகரிப்பதற்கு ஏற்ப உண்டாகும் மொத்தச் செலவின் மாறுபாட்டினை குறிப்பதாகும். எனவே,

இறுதிநிலை என்ற கருத்தினை, X-ன் மாறுபாடுகள் மிகமிகச் சிறிதாக அமையும் நிலையில் ஏற்படும் எல்லை வரையறை நிலையில் கருதுதல் வேண்டும். பொதுவாக இறுதியில் ஏற்படும் நிலையினை அளவிடுவது இறுதிநிலைக் கருத்தின் பயனாக அமையும். மற்றொரு உதாரணமாக, நுகர்ச்சியியலில் காணப்படும் இறுதிநிலைப் பயன் என்ற கருத்தினைக் கூறலாம். ஒரு பொருளின் உபயோகிக்கும் அளவு அதிகரித்த நிலையில், அதன் பயனில் ஏற்படும் அதிகரிப்பை இது காட்டும்.

'இறுதிநிலை' மதிப்பினை மிக எளிதாகக் கணக்கிட, வகைவேறுபாட்டுக் கெழு உதவுகிறது. பின்வரும் சார்பினைக் கருதுக:

சில நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில், பொருளின் தேவையானது $p = \psi(x)$ என்ற சார்பின்மூலம் தரப்படுகிறது. இங்கு, p என்ற 'பொருளின் விலை' யானது, தேவை அளவு x-ன் தொடர்ச்சியான, குறைந்து செல் சார்பாகக் கொடுக்கப்படுகிறது. p என்ற விலையினை 'சராசரி வருவாய்' என்று கூறுகிறோம். ஏனெனில், x என்ற தேவையிலிருந்து பெறப்படும் மொத்த வருவாய் $R (= x \cdot p)$ என்ற அளவினை, மொத்தத் தேவை அளவின்மூலம் வகுக்க, கிடைப்பது $\frac{R}{x} = \frac{xp}{x} = p$ ஆகும். எனவே, தேவை சார்பானது, சராசரி வருவாய் சார்பாக அமைகிறது.

இனி, இறுதிநிலை மதிப்பைக் கருதுவோம்:

தேவை அளவு x ஆனது, என்ற குறிப்பிட்ட அளவிலிருந்து Δx என்ற சிறு அளவு அதிகரிக்கப்படுவதெனக் கொள்வோம். இதற்கு இணையாக, மொத்த வருவாய் R-ம் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு, ΔR அளவு, அதிகரிப்பதாக கருதுவோம். (ஏனெனில் R என்ற சார்பு, x-ஐச் சார்ந்ததாக அமைகிறது.) எனவே, மொத்த வருவாய் R-ன் அதிகரிப்பு வீதமானது (x உடன் தொடர்புற்று) $\frac{\Delta R}{\Delta x}$ என்ற விகிதத்தின்மூலம் கிடைக்கும். இது x அளவிலிருந்து, $x + \Delta x$ வரையிலான தேவை அளவுகட்கு ஏற்ற 'சராசரி வருவாய்' அளவைத் தீர்மானிக்கும். தேவை அளவு மாறுபாட்டு அளவு Δx ஆனது மிகவும் சிறியதாய் அமைந்திருப்பின், அதாவது $\Delta x \to 0$ ஆனால், x-ன் இறுதிநிலையில் அமையும், வருவாய் அதிகரிப்பு வீதத்தினை,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta x}$$ என்று பெறுகிறோம்.

இது R என்ற மொத்த வருவாய்ச் சார்பின் வகை வேறுபாட்டுக் கெழுவாக அமைவதைக் காணலாம். இது, இறுதிநிலை வருவாய் (marginal revenue) என்று கூறப்படும். இது

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}\{x\,\psi(x)\}$$ என்று அமையும்.

மேற்கண்ட நிலை, நுகர்ச்சி இயலின் ஒரு கூறுகும். (விளிம்பு) 'இறுதி நிலை' என்ற கருத்து பல பொருளாதாரக் கோட்பாடுகளில் அமைவதைக் காணலாம். விளிம்பு (இறுதிநிலை)ப் பயன் (marginal utility), விளிம்பு (இறுதிநிலை)ச் செலவு (marginal cost), விளிம்பு (இறுதிநிலை) உற்பத்தி (marginal product), விளிம்பு (இறுதிநிலை)ப் பதிலீட்டு வீதம் (marginal rate of substitution) என்று பல்வேறு நிலைகளில், விளிம்பு (இறுதிநிலை) அளவுகளை மதிப்பிட்டறிய, வகை வேறுபாட்டுக் கெழுக்கள் மிகவும் பயன்படுகின்றன. இதைக் கண்டறிய, கருதப்பட்ட முக்கியமான வழி முறைகளைப் பயன் படுத்தலாம்.

ஒரு மாறியினைச் சார்ந்த சார்பாக அல்லாமல், ஒரு சார்பு பல மாறிகளைச் சார்ந்திருப்பின், ஒவ்வொரு மாறியுடனும் அச் சார்பினைத் தொடர்புபடுத்தி, பகுதி வகை வேறுபாட்டுக் கெழுக்களை (partial derivatives)க் காண்கிறோம் உதாரணமாக, உற்பத்திச் சார்பில், $f(a, b) = x$ என்று உள்ள நிலையில், இறுதி நிலை உற்பத்தி விளைவுகள் $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial b}$ என மதிப்பிடப் பெறும். இவற்றையும், இவற்றோடு தொடர்புடைய வகை வேறுபாட்டு முறைகளையும் விரிவாகப் பிறிதொரு இடத்தில் காண்போம்.

வகை வேறுபாட்டுக் கெழுக்களின் மற்றொரு முக்கியப் பயனையும் குறிப்பிட வேண்டும். சில பிரச்சினைகளின் தீர்வு காண, கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் உச்ச மதிப்பு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பு இவற்றைக் கண்டறிய, நிபந்தனைகள் வகையிடல் அடிப்படையில் தரப்படுகின்றன. உதாரணமாக, $y = f(x)$ என்ற சார்பின் உச்ச மதிப்பைக் காண, $\frac{dy}{dx} = 0$ மற்றும் $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ என்ற நிபந்தனைகள் பயன்படுகின்றன. பொருளாதார ஆய்வுகளில் இது நமது கணக்கிடலை மிக எளிதாக்கவல்லது. உதாரணம்: சர்வாதீன இலாபம் உச்சநிலைப் படுத்தப்படுகையில், இலாபச் சார்பினில் இந் நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்தி, சமநிலையில் பொருளின் விலை, தேவை அளவு, உச்ச இலாப அளவு ஆகியவை மதிப்பிடப்படு கின்றன.

$f(x)$ என்ற ஒற்றை மதிப்புடைய (single valued) சார்பின் வகை வேறுபாட்டுக் கெழுவான $\frac{dy}{dx}$ என்பது அச் சார்பினது மாறுபாட்டு வீதத்தை மதிப்பிடும் (rate of change). அச் சார்பின் வளைவினது தொடுகோட்டுச் சாய்வை (tangent gradient) இது தருகிறது. மற்றும், ஒரு சார்பானது அதிகரித்துச் செல்வதா, அல்லது குறையும் தன்மையுடையதா என்பதை $\frac{dy}{dx}$-ன் + அல்லது — குறியை வைத்து நிர்ணயிக்கிறோம். $\frac{dy}{dx}$ (அல்லது $f'(x)$) நேர்க் கணியமாக அமையும் மதிப்புகளில், $f(x)$ ஆனது தொடர்ந்து அதிகரிப்பதாகவும் (x அதிகரிக்கையில்). மாறாக $f'(x)$ எதிர்க்கணியமெனில், $f(x)$ ஆனது தொடர்ந்து குறைவதாகவும் கருதலாம். $x = a$ என்ற மதிப்பில், $f'(x)$ என்பது பூஜ்யமாக அமைந்திருப்பின், அதற்கேற்ற $f(x)$ மதிப்பு, 'நிலையான மதிப்பு' (stationary value) எனப்படும்.

$f(x)$ என்ற சார்பின் உச்ச மற்றும் மீச்சிறு (maximum/minimum) மதிப்புகள் அமைய விதிகளாவன :

$f(x)$-ன் உச்சநிலை/சிறும மதிப்புகள் அனைத்தும் $f'(x) = 0$ என்ற நிலையில் ஏற்படுகின்றன. இது முக்கிய நிபந்தனை.

$f'(x)$ ஆனது, x அதிகரிக்கையில், + -லிருந்து — -க்கு, a என்ற மதிப்பு மூலம் மாறுகையில் ($f'(a) = 0$), $f(a)$ என்ற மதிப்பு இச்சார்பின் உச்சநிலை மதிப்பாகும். இதற்கு எதிரான நிலையில். இச்சார்பின் சிறும மதிப்பு அமையும். இரண்டும் இல்லாத நிலையில், உச்ச மற்றும் சிறும மதிப்பு அமைவதில்லை எனக் கொள்ளப்படும்.

இதை விரிவாக, 'போதுமான' (sufficient condition) நிபந்தனை மூலம் கருதலாம் :

போதுமான நிபந்தனை இரண்டாம் நிலை வகை வேறுபாட்டு கெழுக்கள் (second order derivatives) மூலம் தரப்படும்.

(i) $x = a$ என்ற மதிப்பில், $f''(a) > 0$ என்றிருப்பின், $f(x)$ என்ற சார்பானது x-ன் அதிகரிப்புக்கு ஏற்ப, a எனும் மதிப்பு மூலம் அதிகரிக்கும். $y = f(x)$ என்ற வளைவு $x = a$ என்ற மதிப்பில், கீழிருந்து குவிவாக அமையும். அதாவது, $f(a)$ என்ற மதிப்பு, $f(x)$ சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பாக அமைகிறது.

$\therefore$ $f'(\ ) = 0$; $f''(a) > 0$ என்ற நிலையில், $f(\ )$ ஆனது சார்பின் மீச்சிறு (minimum) மதிப்பாகிறது.

(ii) $x = a$ எனும் அதே மதிப்பில், $f''(a) < 0$ என்றிருந்தால், x-ன் அதிகரிப்பு ஏற்ப, $f(\cdot)$ ஆனது குறைகிறது. $y = f(\cdot)$ என்ற வளைவு $x = a$ எனும் மதிப்பில் கீழிருந்து குழிவாக அமையும். எனவே, $f'(0)$; $f''(a) < 0$ என்ற நிலையில் $f(x)$-ன் உச்சநிலை மதிப்பு அமையும்.

பொதுவாக, $f(x)$-ன் உச்ச/மீச்சிறு மதிப்புகள் அமைய ($x = a$ என்ற மதிப்பில்),

(i) $f'(x)$ 0 என்ற முக்கிய நிபந்தனையும்,

(ii) $f''(x) < 0$ என்ருல், உச்ச மதிப்பும்,

$f''(x) > 0$ என்ருல், சிறும மதிப்பும் அமைந்திருக்குமென வரையறுக்கிறோம்.

உதாரணமாக, $y = x^3 - 3x^2 + 5$ என்ற சார்பைக் கருதுக.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore$ $f'(x) = 0$ என்பது, $3x^2 - 6x = 0$

அதாவது $3x(x-2) = 0$ ஆகும். இதிலிருந்து $x = 0$; $x = 2$ என்ற மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(3x^2 - 6x)$$

$$= 6x - 6$$

$x = 0$ எனப் பிரதியிட, $\frac{d^2y}{dx^2} = -6 < 0$ ஆகும்.

எனவே, $x = 0$ என்ற மதிப்பில், $f(x)$ உச்சமாகிறது.

$\therefore$ $y = 5$ என்பது உச்ச மதிப்பு,

$x = 2$ எனப் பிரதியிட, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6 > 0$ ஆகும்.

∴ $x = 2$ எனும்பொழுது, $f(x)$ சிறும மதிப்பாகிறது.

∴ $y = 1$ என்பது சிறும மதிப்பு.

இவ்வாறு எந்தச் சார்பினுக்கும் வரையறுக்கலாம்.

$f(x)$ என்ற ஒற்றை மதிப்புடையச் சார்பின் சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை மதிப்புகள்

x எனும் புள்ளியில்,

$f(x)$-ன் சராசரி மதிப்பு : $\frac{f(x)}{x}$;

$f(x)$-ன் இறுதிநிலை மதிப்பு : $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

சராசரி மதிப்பு, 0-விலிருந்து x என்ற கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பு வரையில் கருதப்பட்டுக் கணக்கிடப்படுவது; இறுதிநிலை மதிப்பு, கருதப்பட்ட x-ன் இறுதிநிலையில் பெறப்படும் மதிப்பு. இவற்றை தேவை மற்றும் செலவுச் சார்புகட்கு ஏற்கெனவே மதிப்பிட்டோம்.

x, $f(x)$ ஆகியவை நேர்க் கணிய மதிப்புகளைக் கொண்டதெனக் கருதுக. $\frac{f(x)}{x}$ என்ற சராசரியின் உச்சநிலை அல்லது சிறும மதிப்புகளுக்கேற்ற x-ன் மதிப்பினைக் கண்டறிய முயலுவோம்.

எனவே,

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2};$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \frac{x^2 \cdot f''(x) - 2x f'(x) + 2 f(x)}{x^3}$$

$\frac{f(x)}{x}$-ன் நிலையான (stationery) மதிப்புகள்,

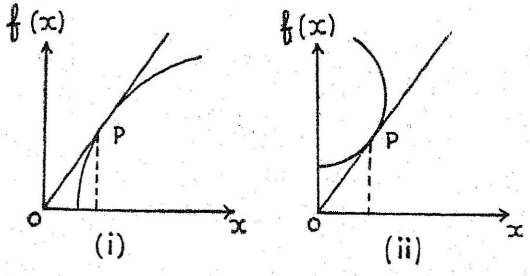
$x f'(x) - f(x) = 0$ எனும் நிலையில், அமைகின்றன.

$$\therefore \quad \frac{f(x)}{x} = f'(x).$$

இந்தப் புள்ளியில், இரண்டாம் நிலை வகை வேறுபாடானது.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \frac{f''(x)}{x}$$

x நேர்க்கணியமாவதால், இதன் குறியும் $f''(x)$-ஐப் பொறுத்து அமையும். எனவே $f(x)$-ன் சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை மதிப்புகள் சமமாக அமைகையில், $f(x)$ சார்பின் சராசரி மதிப்பு நிலையானதாக அமையும். $f''(x) < 0$ என்று அப் புள்ளியில் அமைந்தால், அது உச்ச மதிப்பாகவும், $f''(x) > 0$ எனில், சிறும மதிப்பாகவும் அமையும்.



படம் 14.

விளக்கப்படத்தில், $f(x)$-ன் சராசரி மதிப்பின் நிலையான அளவானது $y = f(x)$ வளைவில், தொடு கோடானது ஆர வெக்டார் திசையுடன் (radius vector) (OP) ஒன்றாக அமையும். P என்ற புள்ளியாகக் காட்டப்படும். அதாவது, அப் புள்ளியில் அமையும் தொடு கோடானது ஆரம்பப் புள்ளி O-ன் வழியாகச் செல்லும். அந்த P என்ற புள்ளியில், வளைவானது கீழிருந்து குழிவாக அமைந்தால், (i) சராசரி மதிப்பு உச்சமாகவும், குவிவாக அமைந்தால், (ii) சிறுமமாகவும் கருதப்படும். இவ்விரண்டு நிலைகளும் படத்தில் காட்டப்படும் :

6. நுகர்வோரின் சமநிலை

(Consumer's Equilibrium)

நுகர்வோரின் தேவை (Consumer's demand) மாற்றுப் பொருட்களினிடையே விருப்பேற்பு (Choice between alternatives).

மூன்றும் அத்தியாயத்தில் ஒரு பொருளின் தேவை, அளிப்பு நியதிகளிலிருந்து எவ்வாறு சந்தைச் சமநிலை விலை, சந்தைச் சமநிலை அளவு கிடைக்கிறது என்பதை பூரணமாகப் பார்த்தோம். தேவையும் அளிப்பும் எந்தச் சக்திகளைச் சார்ந்திருக்கின்றன என்பதுபற்றி மிகவும் விரிவாக இங்கு விவரிப்போம். பிறகு அவை சந்தையில் எவ்வாறு ஒன்றிணைந்து செயல்படுகின்றன என்பதைக் காண்போம்.

சந்தை தேவை வளைகோடுகள் இடமிருந்து வலமாக கீழ் நோக்கிச் சரிவாக இருப்பதை முன்பே நாம் அறிவோம். இங்கு நுகர்வோர் ஒரு பொருளைச் சந்தையில் வாங்கச் செல்கையில் என்னென்ன காரணிகளால் உந்தப்படுகிறார் என்பதைக் கவனிப்போம். ஒரு பொருள் வாங்குகையில் இந்த 'நுகர்வோரின் தேவை'க்கான ஆய்வில் கீழ்க்கண்ட அனுமானங்களைக் கவனிப்போம்.

1. நுகர்வோரது விருப்பங்கள் எப்போதும் மாருமல் உள்ளன.

2. குறிப்பிட்ட அளவு பணமே அவரிடம் உள்ளது.

3. சந்தைக்கு வரும் நிறைய நுகர்வோர்களில் அவரும் ஒருவர்.

4. அவர் மற்ற எல்லாப் பொருட்களின் விலைகளையும் அறிந்து வைத்திருக்கிருர்.

5. தான் விரும்பினுல், அவர் குறைந்த அளவுகளில் (பின்னங்களில்) தன் பணத்தைச் செலவிடுகிருர்.

6. அவர் பகுத்தறிவு முறையில் (rationaliy) செயல்படுகிருர். இந்த அனுமானங்களுடன் இப்போது நுகர்வோர் சந்தையில் கிடைக்கும் பல பொருட்களில் எவற்றை எந்த அளவு வாங்குவது என்பதை எப்படித் தீர்மானிக்கிருர் என்று அலசிப் பார்ப்போம்.

நுகர்வோர் பொருட்களை வாங்குகையில், தன்னிடம் உள்ள குறிப்பிட்ட பணத்தைக் கொண்டு, மிகவும் அதிகமான (திருப்தியை) நிறைவை அடைவதே தனக்கு முக்கிய குறிக்கோள் எனக் கருதுகின்ருர், இதைப் 'பொருளாதார பகுத்தறிவுடைமை'த் (Economic Rationality) தத்துவம் எனக் கூறுகிறோம். அதாவது மிகப் பெரிய நிறைவை அடைவதற்காக தான் வாங்கும் பொருட்களை ஒன்றைவிட மற்றது சிறந்தது என திட்டமிட்டு வாங்குகிருர். அவர் தன்னலத்துடன் செயல்படுகிருர் என்று சொல்லிவிட முடியாது ; ஏனெனில் தன் குடும்பத்துக்காகத்தான் இவ்வாறு செயல்படுகிருர். தன் குழந்தைக் காலணிகள் வாங்கலாம், அல்லது வீட்டுக்குக் கம்பளி வாங்கலாம். எனினும் இது போன்ற பொருட்களை வாங்குகையில், மிகவும் அதிகமாக யோசனை செய்து தீவிரமாகத் திட்டமிட்டு எதை வாங்கலாம் என்று தீர்மானிக்கிருர். வரம்புக்குட்பட்ட பணத்தைக் கொண்டு எவ்வாறு உச்ச நிறைவை அடைவது என்பதை விவரிப்போம்.

நுகர்வோரது அடிப்படைப் பிரச்சினை மாறி வரும் நிறைவுகளில் எதை விருப்பித் தேர்ந்தெடுப்பது என்பதாகும். அவர் தான் விருர்பும் எல்லாப் பொருட்களையும் வாங்கும் அளவுக்கு பண வசதி பெற்றவராக இல்லாததால் ஒன்றை விருர்பி வாங்கிஞல் மற்றதை விட்டுவிட வேண்டியுள்ளது. எனவே இப்போதுள்ள பிரச்சினை மாற்றுப் பொருட்களிடையே விரும்பித் தேர்வு செய்வதாகுர். எனவே அவர் தான் மிகவும் விரும்பும் பொருட்களையே வாங்குகிருர். இப்படிச் செய்கையில் ஒவ்வொரு பொருளையும் வாங்குவதற்கு முன்னர், இப்பொருளுக்கான விலை என்ன ? அது உகந்த (பெறுமானமுள்ள) விலைதானு ? இதை வாங்குவதால் எதையெதை வாங்காமல் விட வேண்டியுள்ளது ? தனக்கு அப்பொருட்களின் பெறுமானம் யாவை ? என்பனவற்றையெல்லாம் சிந்திக்க வேண்டியுள்ளது.

ஒரு குடும்பத்தலைவி (house - wife) கடைக்கு காய்கறிகள் வாங்கச் செல்கிருள் என்று கொள்வோம். பீன்ஸ் வாங்குவதாக

இருந்தால் விலைக்குத் தக்கவாறு வாங்கிக் கொள்ளலாம் என்று செல்கிறாள். 1 கிலோ பீன்ஸ் விலை 2 ரூபாய் என்றால் ஒன்றும் வாங்கமாட்டாள். 1 கிலோ பீன்ஸ் விலை 50 பைசா என்றால் நிறைய வாங்கிச்செல்ல விரும்புவாள். மாறிவரும் விருப்பங்களுக்குக் காரணம் விலைதான் எனத் தெள்ளெனத் தெளிவாகிறது. விலை குறைந்திருந்து நிறைய பீன்ஸ் வாங்கினால், மற்ற பொருட்களில் எதையாவது வாங்காமல் செல்லவேண்டும்; அல்லது மற்ற பொருட்கள் வாங்கும் அளவைக் குறைத்து வாங்கியாகவேண்டும்; ஏனென்றால் கையில் அவள் கொண்டு சென்ற பணம் குறிப்பிட்ட வரம்புக்குட்பட்ட பணம் எனவே பீன்ஸின் விலையைப் பொறுத்தே, பீன்ஸ் வாங்கப்பட்டால் மற்ற எந்தெந்தப் பொருட்கள் (காய் கறிகள்) வாங்கமுடியாது என்பது தீர்மானிக்கப்படும். பீன்ஸின் விலை 1 கிலோ ரூ 2 என்றால் பீன்ஸுக்குப் பதிலாக ஏதாவது முக்கியமான மளிகைப் பொருள் வாங்கப்படலாமல்லவா! குடும்பத் தலைவியின் கணிப்பு (calculation) பீன்ஸின் விலையைப் பொறுத்து மட்டுமல்லாமல், மற்ற பொருட்களின் விலைகளையும் பொறுத்து இருக்கும். விக்ஸ்டீட் (Wicksteed) கூற்றுப்படி "பழைய உருளைக் கிழங்கு குறைந்த விலையில் விற்றால், அதிக விலையில் புதிய உருளைக்கிழங்கை வாங்கும் நுகர்வோர் எண்ணிக்கை குறைவாகவே இருக்கும்" ஏனெனில் இங்கு விலை மதிப்பில் இரு மாற்றுப் பொருட்கள் இருக்கின்றன. குடும்பத் தலைவி 2 ரூபாய் கொடுத்து 1 கிலோ பீன்ஸ் அதிக விலையில் வாங்கத் தீர்மானித்து மேலும் மற்ற எந்தப் பொருட்களையும் குறைக்காத அளவுக்கு வாங்கினால், அவளது மற்ற ஏதாவது செலவைக் குறைக்கவேண்டியிருக்கும். உதாரணமாக அவள் அன்றைக்குச் செல்ல இருந்த திரைப் படத்துக்குச் செல்லமுடியாது எனக் கொள்ளலாம்.

விருப்பத் தரக்கோல் (Scale of Preference)

நுகர்வோர் உச்ச நிறைவைப் பெறும் பொருட்டு எந்தப் பொருட்களை எந்த எந்த அளவு வாங்குவது என தீர்மானிக்கையில் அந்த எல்லா பொருட்களையும் விருப்பத்திற்கேற்றவாறு தரப்படுத்தி வரிசைப்படுத்துகிறார். தான் விரும்பும் பொருட்களை இவ்வாறு விருப்பத் தரக்கோல் முறையில் வரிசைப்படுத்திய பின்னர் எந்தப் பொருள் முதலிடம், எப்பொருள் இரண்டாம் இடத்தை வகிக்கிறது என்பதைக் கணக்கில் கொண்டு தன்னிடம் கையில் உள்ள வரம்பிற்குட்பட்ட பணத்தின்மூலம் மிக முக்கியமான பொருட்களை வாங்கி உச்ச நிறைவைப் பெறுகிறார். இத்தகைய விருப்பத் தரக்கோள்கள் முற்றிலும் முழுமையானதென்றோ எல்லா நுகர்வோர்க்கும் பொருந்தியது என்றோ சொல்லுதற்கு முடியாது. மேலும் முக்கியமாகக் கவனிக்கப்படவேண்டிய ஒன்று,

நுகர்வோர் சந்தையில் செலவு செய்யும் பணம் நிலையான வரையறைக்குள் உட்பட்டது என்று சொல்லிட இயலாது. ஏனெனில் வீடு, பணி, விடுமுறை சேமிப்புகள், கல்வி இவற்றிற்கான செலவுகள் சந்தையில் பொருட்களின் விலைகளை அனுசரித்து மாறுபடுவதால், சந்தைச் செலவிற்கு என ஒதுக்கப்பட்ட பண அளவு நிலையானது அல்ல, அத்துடன் துய்ப்போரது (நுகர்வோர்) பண அளவின் வாங்கும் திறன் (Purchasing power) மாறுபடுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பொருளின் விலை காலையில் குறைந்தும் (கூடியும்) அதே பொருள் அன்று மாலையில் விலை கூடியும் (குறைந்தும்) இருக்கலாம். இவ்வாறு பணத்தின் வாங்கும் திறன் மாறுபடுவதை மனதில் கொண்டு, குடும்பத்தலைவி தனது விருப்பத் தரக்கோலின்படி பொருட்களை வாங்குவதுபற்றி தீர்மானிக்க முடியும்.

விளிம்பில் எடுக்கப்படும் முடிவுகள் (Decisions at the Margin)

இதுவரை குடும்பத் தலைவி பீன்ஸின் விலையும், மற்ற மாற்றுப் பொருட்களான கோஸ், காரட், காலிஃபிளவர் போன்றவற்றின் விலைகளையும் தெரிந்துகொண்டு. பீன்ஸ் வாங்குவதா வேண்டாமா எனத் தீர்மானிப்பதை ஆராய்ந்தோம். அவள் பீன்ஸ் வாங்குவாளா, இல்லையா என்பதைத் தான் ஆராய்ந்தோமேயன்றி எவ்வளவு வாங்குவாள் என்பதைப்பற்றி ஆராயவில்லை.

ஐந்து குழந்தைகள். கணவன் மனைவி அடங்கிய குடும்பத்தில் சிறப்புச் சாப்பாட்டிற்காக எத்தனை கிலோ பட்டாணி வாங்க வேண்டும் என்று குடும்பத்தலைவி முடிவு எடுப்பதை ஆராய்வோம். பட்டாணியின் விலையைப் பொறுத்து அவளுடைய விருப்பச் சார்புகள் கீழ்க்கண்டவாறு அமையும்.

பட்டாணியின் விலை கிலோ ரூ. 3 என்றால் 2 கிலோ வாங்குகிறாள். பட்டாணியின் விலை கிலோ ரூ. 1·50 என்றால் 4 கிலோ வாங்குகிறாள். பட்டாணியின் விலை கிலோ ரூ. 0·75 என்றால் 8 கிலோ வாங்குகிறாள். கிலோ ரூ. 3 எனும்போது 2 கிலோவே அன்றைய தேவைக்கு போதும் என எண்ணுகிறாள். விலை 1·50 ஆகக் குறையும் போது 4 கிலோ வாங்கி அன்றைய தேவைக்கு அதிகமாகப் பயன்படுத்தி மீதமுள்ளதை மறு நாளைக்கும் வைத்துக் கொள்ள நினைக்கிறாள். ஆனால் விலை இன்னும் குறைந்து கிலோ 0·75 என இருக்கும்போது, 8 கிலோ வாங்கி வாரம் முழுதும் தினசரி பயன்படுத்த விருப்பப்படுகிறாள்.

இதை மேலும் விளக்கிக் கூறினால் கிலோ ரூ. 3 என்னும்போது 2 கிலோ மட்டுமே வாங்குகிறாள் என்றால் முதல் இரண்டாவது

கிலோக்களும் 3 ரூபாய் மதிப்பைவிட அவனுக்குப் பெரிதாகப் படுகின்றன. மூன்றாவது கிலோ வாங்க நினைத்தால் 3-வது கிலோவை விட 3 ரூபாய்தான் உயர்ந்ததாகப் படுகிறது. எனவே இந்த 3 ரூபாய் விலையில் 3-வது கிலோ வாங்க மறுக்கிறாள். இதே போல விலை கிலோ 1·50 எனக் குறையும்போது 3-வது 4-வது கிலோ வாங்கப் பிரியப்படுகிறாள். ஆனால் 5-வது கிலோ வாங்க மறுக்கிறாள். ஏனெனில் 5-வது கிலோவை விட ரூ. 1·50 அவளுக்குப் பெரிதாகப் படுகிறது. மேலும் கிலோ 0·75 ஆக இருக்கும்போது 5-வது, 6-வது, 7-வது, 8-வது கிலோ வரை வாங்குவதற்கு பிரியப்படுகிறாள். ஆனால் 9-வது கிலோவை வாங் மறுக்கிறாள். ஏனெனில் 9-வது கிலோவைவிட அவளுக்கு ரூ. 0·75 பெரிதாகப்படுகிறது.

இந்த ஆய்வு பொருளாதாரத்தில் விளிம்புத் தத்துவத்தை (concept of margin) விளக்குகிறது. குடும்பத் தலைவி பொருளின் விலை குறையும் சமயத்தில் விளிம்புகளில் முடிவு எடுப்பதைக் காண்கிறோம். நுகர்வோரை வாங்குவதற்கு தூண்டும் ஒரு பொருளின் பகுதியை அவருடைய 'விளிம்பு வாங்கற்பாடு' (marginal purchase) என்று கூறுகிறோம். ஏனெனில் அதை வாங்கலாமா, வேண்டாமா என்ற விளிம்பில் அவள் இருப்பதால் அப் பெயர் ஏற்பட்டது. அதே போன்று நுகர்வோர், பொருளின் எந்தப் பகுதியை உடனடியாக வாங்க எண்ணுகிறாரோ, — இறுதியில் வாங்கினாலும் வாங்காவிட்டாலும் — அந்தப் பகுதியை 'விளிம்பு அலகு' என்கிறோம்.

நம் குடும்பத் தலைவி பரிசீலனை செய்யும் பொருளின் ஒவ்வொரு அலகும் (கிலோவையும்) அந்தச் சமயத்தில் 'விளிம்பு அலகாக' ஆகின்றது. தயக்கமின்றி ஒரு அலகை (கிலோவை) அவள் வாங்கினால் அது 'உள் விளிம்பு வாங்கற்பாடு' (Intro marginal purchase) என அழைக்கப் பெறும். எந்த அலகையாவது (கிலோவை) வாங்க மறுக்கும்போது, அந்த அலகு 'புற விளிம்பு வாங்கற்பாடு' (Extra-marginal purchase) ஆகும். உதாரணமாக கிலோ ரூ. 1·50 என்றிருக்கும்போது அவள் வாங்கும் 3-வது கிலோ உள் விளிம்பு வாங்கற்பாடாகும். அவள் வாங்க மறுக்கும் 5-வது கிலோ புறவிளிம்பு வாங்கற்பாடாகும்.

நுகர்வோர் தான் விரும்பிய பொருளின் ஒரு பகுதியை வாங்கும்போது அதனால் தனக்கு ஏற்படும் 'விளிம்புப் பொருளுடைமை'யை (Marginal significance) கணக்கிடுகிறார். அப் பொருளை (பகுதியை) வாங்குவது இலாபமாக இருக்குமா என்று

யோசிக்கிருர். எந்தப் பொருளால் (ரூபாய்) அந்தப் பொருள் வாங்கப்படுகிறதோ அதனுடைய விளிம்புப் பகுதியின் அளவு என்ன என்று யோசிக்கிருர். எடுத்துக்காட்டாக நமது குடும்பத் தலைவி 4-வது கிலோவை வாங்கலாமா வேண்டாமா என்று யோசிக்கும் போது அந்த நான்காவது கிலோ ஒரு விளிம்புக் கிலோவாகிறது. அந்த நிலையில் பட்டாணியின் விளிம்புப் பொருளுடைமை ரூபாய் மதிப்பில் ஒரு கிலோவிற்கு ரூ. 1·50 ஆக இருக்கும். ஏனெனில் குடும்பத் தலைவி அந்த கிலோ பட்டாணிக்கு ரூ. 1·50 கொடுத்து வாங்குவதற்கு மட்டும் பிரியப்படுகிருள். எனவே அந்த ரூ. 1·50 அந்த 4-வது கிலோவின் சரியான விலையாக உள்ளது. ஆகவே பட்டாணியின் விளிம்புப் பொருளுடைமை அவளுக்கு பண மதிப்பில் தேவைக்கு அதிகமாக இருந்தால் அந்த குறிப்பிட்ட விளிப்புக் கிலோவை வாங்குவது பற்றி அவள் யோசிக்கிருள். ஆகவே பொதுவாகக் கூறிஞல் பண மதிப்பில் ஒரு பொருளின் விளிப்புப் பொருளுடைமையானது, அப் பொருளை அதிகமாக பணத்துடனும், மற்ற பொருட்களுடனும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்போது, குறைகிறது.

நுகர்வோரின் சமநிலை (Consumer's Equilibrium) :

எவ்வளவு பட்டாணி தான் வாங்கப்பட வேண்டும் என்பதைத் தீர்மானிப்பது எப்படி என்று இங்கு கவனிப்போம். 1 கிலோ ரூ. 0·75 என்ருல், நம் குடும்பத் தலைவி 8 கிலோ வாங்கினுள். 9-வது கிலோவுக்கு ரூ. 0·75 தர மறுத்து விட்டாள். இந்த நிலையில் ரூ. 0·75 அவளுக்குத் தந்த நிறைவை ஒன்பதாவது கிலோ தரவில்லை என அறிகின்ருேம். இது ஏன் என்ருல், ரூ. 0·75 என்று உற்பத்தியாளர்கள் ஏற்படுத்திய விலையானது, நம் குடும்பத் தலைவி ஒன்பதாவது கிலோவிற்கு, பண மதிப்பில் அனுமானித்திருந்த விளிம்புப் பொருளுடைமையை விட, அதிகமாக இருந்ததேயாகும். ஒருக்கால் அந்த 9-வது கிலோ ரூ. 0·50 வுக்கு விற்கப்பட்டால் நம் குடும்பத் தலைவி 9-வது கிலோவை வாங்கியிருந்தாலும் இருக்கலாம்.

நமது முன்னைய எடுத்துக்காட்டில் இரண்டாவது கிலோவை ரூ. 3·00 கொடுத்து வாங்கத் தயாராயிருந்ததற்கான காரணம் நடைமுறைச் சந்தை விலை (ரூ. 3-ம்) யும் இரண்டாவது கிலோவுக்கான விளிம்புப் பொருளுடைமையும் சமமாக இருப்பதுதான். இப்போது விலை ரூ. 1·50 ஆகக் குறைந்தால், விருப்புத் தரக்கோல்கள் (Scales of preferences) விலைகளைச் சார்பற்று இருப்பதால் (independent of prices), இரண்டாவது கிலோவின் விளிம்புச் பொருளுடைமை (பண மதிப்பில் ரூ. 3·00) யானது இதே

நிலையில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். ஆகவே அதன் விளிம்புப் பொருளுடைமை (ரூ.3) தற்சமயமுள்ள சந்தை விலையை (ரூ 1·50) விட அதிகமாக இருப்பதால், இரண்டாவது கிலோ வாங்கப் படுகிறது.

இதே போன்று நான்காவது கிலோவின் விளிம்புப் பொரு ளுடைமை, சந்தை விலை (ரூ. 1·50) -க்குச் சமமாக இருப்பதாகக் காண முடியும். நான்காவது கிலோ பட்டாணிக்கு விளிம்புப் பொருளுடைமை பண மதிப்பில் ரூ. 1·50 ஆக உள்ளது. விலை 0·75 ரூபாய்க்குக் குறைந்தால், நான்காவது கிலோவுக்கான விளிம்புப் பொருளுடைமை (ரூ. 1·50) யானது. சந்தை விலையான ரூ. 0·75 -க்கு அதிகமாக இருக்கிறது. எனவே நான்காவது கிலோவுக்கான விலை ரூ. 1·50 ஆகும். ஆதலால் குடும்பத் தலைவிக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட கிலோவுக்கான விளிம்புப் பொரு ளுடைமை, அந்தப் பொருளின் சந்தை விலைக்குச் சரிசமமாக இருந்தால், அவள் அந்த கிலோ பட்டாணியை வாங்கத் தீர்மா னிக்கிறாள்.

எனவே நுகர்வோரின் தேவை நியதியில் ஒரு முக்கியமான விதியைக் கவனிப்போம். "ஒரு நுகர்வோர் (துய்ப்போர்) தான் வாங்கும் X என்ற ஒரு பொருளின் கடைசி (விளிம்பு) அலகின் விளிம்புப் பொருளுடைமை, அதன் சந்தை (பண) விலைக்குச் சமமாக இருக்கும் வரையில், அந்த அளவுவரை, அப் பொருளை பணம் கொடுத்து வாங்குகிறார்". இந்த அடிப்படைத் தத்துவம் (கோட்பாடு) ஒரு நுகர்வோர் எப்படி ஒரு சமநிலை (equlibrium) யை அடைந்து அந்த அளவுக்குமேல் அப்பொருளை வாங்க விருப்பமற்று இருக்கிறார் எனக் காண்போம். அவர் ஒவ்வொரு பொருளையும் அதன் விளிம்புப் பொருளுடைமை சந்தை விலைக்குச் சமமாகும் வரை வாங்கிக்கொண்டே சென்றால், அதிகமாக அப் பொருளை வாங்குவதால் தன்னிறைவு பெறமாட்டார். ஏனெனில் விலை குறைவாக இருக்கிறதே என்று ஒரு பொருளைத் தேவைக்கு அதிகமாக வாங்கிக் குவித்துக்கொண்டேசெல்வது பயனற்றதாகும்.

இதேபோன்று 2, 3 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பொருட் களுக்கும் இதைப்போன்று வாங்கும் தன்மையை ஒரே சமயத்தில் கவனிக்க முற்பட்டால் அது ஒரு மிகவும் கடினமான பிரச்சினை யாகும். இங்கு பொருட்கள் என்பது, நுகர்ச்சிப் பொருட்கள், மூலதனப் பொருட்கள், பொருளாதாரப் பணிகள் முதலியனவும் ஆகும். நுகர்வோர், தன் விருப்பங்களை ஒரு பக்கமும், தன் வருமானம், சந்தை விலைகளை மறுபக்கமும் தரப்பட்டபின் நுகர் வோர் தன் செலவுகளைச் சரிக்கட்டும்போது, அவர் சமநிலையில்

இருப்பதைக் காணலாம். தனது பல விருப்பங்களும் மாறுமல் அப்படியே இருக்கும் வரை, மேலும் தன் வருமானம், மற்றும் பல பொருட்களின் சந்தை விலைகள் நிலையாக இருக்கும் வரை, அவர் அதே சமநிலையில் இருக்கிறார். தன் விருப்பங்கள் அவற்றைப் பூர்த்தி செய்யும் சந்தர்ப்பங்கள் மாறும் வரை, அவர் அதே சமநிலையில் இருப்பார்.

இந்த அத்தியாயத்தில் கூறப்பட்டவை நுகர்வோரின் முழுமையில் நேர்மை வாய்ந்த பொருளாதார நடத்தைகளாகும். ஆனுல் நடைமுறையில் இவை எல்லாம் முழுதும் ஒத்துவராது. எனவே தன் விருப்பங்கள், சந்தை நிபந்தனைகள் யாவும் முழுதும் நிலையாக இருந்த போதிலும், நுகர்வோர் எப்போதும் முழுதுமாக ஒரு சமநிலையை அடைவார் என்று கூறிவிட முடியாது. மேலும் நுகர்வோர் உண்மையில் நேர்மை வாய்ந்தவராக இருந்தால், தன் வாங்கற்பாடுகளை தொடர்ச்சியாக மாற்றி அமைத்துக் கொண்டே இருப்பர். ஆனுல் நடைமுறையில் அப்படி யாரும் இருக்க மாட்டார்கள்.

மூன்ருவாதாக தன் விருப்பங்களுடன், சந்தையில் பொருட்கள் விலைகள் மாறியிருக்கும்போது எந்தெந்த சமநிலைகளில் தான் இருக்க வேண்டும் என்று எந்த நுகர்வோரும் முன் கூட்டியே யோசித்து ஒரு புதிய சமநிலையை உருவாக்கிக் கொள்வதில்லை. ஒரு பராரி ஒரு இலட்சாதிபதியாக வேண்டும் எனக் கனவு காணலாம். அவன் மனத்தில் இலட்சாதிபதியின் தன்மைகளும் நடவடிக்கைகளும் எப்படி இருக்க வேண்டும் என்று கூடத் தெரிவதில்லை.

பயிற்சிகள்

1. தேவை வளைகோடு ஏன் கீழ் நோக்கிச் சரிகிறது என்பதை கணித முறையில் விளக்கி எழுதவும்.

2. துய்ப்போரின் தேவைகளுக்கான சிறப்பியல்புகளை நன்கு விளக்கிக் காட்டுக.

3. துய்ப்போரின் தேவைகளை அவரது விருப்பத்தரக்கோல் மூலமாக எவ்வாறு விவரிக்கலாம்? அது எப்படி விலைகளைச் சாராது இருக்கிறது?

4. தேவையில் ஒரு மாறுதல் நிகழக் காரணமாக இருக்கும் சில காரணிகள் யாவை? விளக்குக.

5. தேவை நியதிகளை படம் வரைந்து நன்கு விளக்குக.

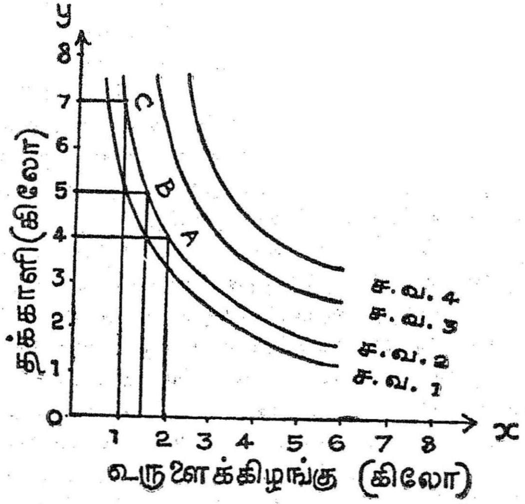
7. சமநோக்கு வளைகோடுகள் ஆய்வு
(Indifference Curve Analysis)

சென்ற அத்தியாயத்தில் நுகர்வோர் தான் வாங்கும் பொருட்களை, விருப்பத் தராதர அளவுகளை (scales of preferences) அல்லது விருப்பத் தரக்கோல்களைக் கொண்டு பாகுபாடு படுத்தி எவ்வாறு எவ்வளவு வாங்குகிறார் எனக் கண்டோம். அத்தகைய ஒரு விருப்பத் தரக்கோலின் தன்மையை மிகவும் விளக்கமாக இந்த அத்தியாயத்தில் கவனிப்போம்.

சந்தை விலைகளைச் சாராதவாறு நுகர்வோரது விருப்பத் தரக் கோல் இருப்பதால், நுகர்வோர் சந்தையில் பொருட்களை வாங்கும் முன்னர், தான் வாங்க இருக்கும் பல்வேறு பொருட்களின் எந்த சேர்மானங்கள் (combinations) தனக்கு அதிக நிறைவைத் தரு கின்றன, எந்தச் சேர்மானங்கள் தனக்கு குறைந்த நிறைவைத் தருகின்றன. எவை தனக்கு சரிசம நிறைவைத் தருகின்றன என நுகர்வோரை நாம் வினவுவோம். அவர் தனக்குத் தேவைப்படுகிற பல பொருட்களின் சேர்மானங்களின் தொகுப்பை முக்கியத்துவத் திற்கு ஏற்றவாறு வரிசைப்படுத்தி நம்மிடம் தருகிறார். ஆனால் பொருட்களின் இந்த எல்லா சேர்மானங்களையும் அவரால் வாங்க முடியாமல் போகலாம். அவற்றின் விலைகளை அறிந்தபோது சில சேர்மானங்களை பொருளுக்குத் தகுந்த விலை இல்லை என்று எண்ணித் தள்ளிவிடலாம். ஆனால் பொருட்களின் எந்த சேர் மானங்களை அவர் நிறைய விரும்புகிறார், எதைக் குறைவாக விரும்புகிறார் என அவர் கூற விழைகிறார். அந்த விருப்பத் தொகுப் பைக் கொண்டு இறுதியாக சந்தையில் பொருட்களை வாங்குகிறார். எனவே எதேச்சையாக ஒரு முடிவு எடுக்காமல், உறுதியான முறையில் விருப்பத் தரக்கோல்களின் தொகுப்பில் ஒரு முடிவை எடுக்கிறார்.

இப்போது சந்தையில் இரு பொருட்கள் மட்டுமே இருப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம். உதாரணமாக தக்காளியும், உருளைக்

கிழங்கும் மட்டுமே சந்தையில் விற்கப்படுகின்றன என்று கொள்வோம். இவ்விரு பொருட்களின் சேர்மானங்கள் நுகர்வோருக்கு எவ்விதத்தில் பல்வேறு நிறைவுகளைத் தருகின்றன என்பதை கீழ்க்கண்ட படம் விளக்குகிறது.



படம் 15.

இங்கு *X* அச்சில் உருளைக் கிழங்கும், *Y* அச்சில் தக்காளியும் அளவிடப்படுகின்றன. நுகர்வோர் *A* என்ற புள்ளியில் இருக்கும் போது 4 கிலோ தக்காளியும், $2\frac{1}{4}$ கிலோ உருளைக் கிழங்கும், அல்லது *B* என்ற புள்ளியில் இருக்கும் போது 5 கிலோ தக்காளியும் $1\frac{1}{2}$ கிலோ உருளைக் கிழங்கும், அல்லது *C* என்ற புள்ளியில் இருக்கும் போது 7 கிலோ தக்காளியும், 1 கிலோ உருளைக் கிழங்கும் வாங்கி மூன்று புள்ளிகளிலும் ஒரே அளவு நிறைவை பெறுவதாக நம்மிடம் கூறுகிருர். இந்த இரு பொருட்களின் மூன்று சேர்மானங்களும் துய்ப்போர்க்கு ஒரே அளவு நிறைவைத் தருகின்றன. அதாவது அவரது விருப்பத் தரக்கோலில் ஒரே நிலையைக் காட்டுகின்றன. *A*, *B*, *C* புள்ளிகளைப் போன்ற நுகர்வோர்க்கு அதே அளவு நிறைவைத் தருகின்ற மற்ற பல புள்ளிகளையும் ஒருங்கிணைத்து ஒரு தொடர் வளைகோடு வரைகிருேம். இங்கு இவ்விரு பண்டங்களும் எந்த ஒரு அலகிலும் வகுபடக் கூடியவை என்று கொள்கிருேம். *A*, *B*, *C* புள்ளிகளின் வழியாக அமைக்கப்பட்ட வளைகோட்டில் இப்பண்டங்களின் எல்லாவிதமான

சேர்மானங்களிலும் நுகர்வோரின் நிறைவு மாறுபடாமல் சமமாக இருக்கின்றது. எனவே இவ் வளைகோட்டை ஒரு "சம நோக்கு வளை கோடு" (indifference curve) என அழைக்கிறோம். மேற் கூறிய படத்தில் இவ் வளைகோடு ச. வ 2 ஆகும். இரண்டாவது சம நோக்கு வளைகோட்டில் கிடைத்த நிறைவின் அளவைவிட அதிக நிறைவைத் தரும் பல சேர்மானங்களைக் காட்டும் மற்றொரு சமநோக்கு வளைகோட்டையும் இதேபோன்று வரையலாம். மேலும் குறைந்த அளவு நிறைவைத் தருகின்ற பல சேர்மானங் களைக் காட்டும். மற்றொரு சமநோக்கு வளைகோட்டையும் வரையலாம். எடுத்துக்காட்டாக ஷ வரை படத்தில் இரண்டாவது சமநோக்கு வளைகோட்டில் உள்ள எல்லா புள்ளிகளையும் விட 3, 4-வது சமநோக்கு வளைகோடுகளில் உள்ள எல்லா புள்ளிகளும் விரும்பத் தகும் நிலைகளைக் காட்டுகின்றன. மூன்றாவது சமநோக்கு வளைகோட்டில் காட்டப்படும் பண்டங்களின் எல்லா சேர்மானங் களும் நுகர்வோருக்கு ஒரே அளவு நிறைவைத் தருவதாக அமைந் துள்ளது. ஆனால் அத்தகைய ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஏற்படும் நிறைவுகள் இரண்டாவது சமநோக்கு வளை கோட்டில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் காணப்படும் நிறைவுகளைக் காட்டிலும் அதிகமாக உள்ளன. இதைப் போன்று நான்காவது சமநோக்கு வளைகோட்டில் காணப்படும் இரு பொருள்களின் எல்லா சேர்க்கைகளின் இடையேயும் துய்ப்போர் மாறுபடாமல் இருக்கிறார். ஆனால் அவர் மூன்றாவது சமநோக்கு வளை கோட்டிலுள்ள சேர்க் கைகளைவிட இவற்றைத்தான் (நான்காவது வளைகோட்டு சேர்க்கை) அதிகம் விரும்புகிறார். இவ்வாறே முதலாவது சம நோக்கு வளைகோடு, 2. 3. 4-வது சமநோக்கு வளைகோடுகளை விட குறைந்த அளவு நிறைவைப் பெற்றுள்ளதைக் காட்டுகிறது.

இந்த சமநோக்கு வளைகோடுகள், ஒரு நாட்டுப் படத்தில் வரையப்படும் உருவரைக் கோடுகளை ஒத்திருக்கின்றன. உரு வரைக்கோடுகள், கடல் மட்டத்திற்குமேல் ஒரே உயரத்தில் உள்ள எல்லா ஊர்களையும் காட்டுகின்றன. உயரத்திற்குப் பதிலாக ஒவ் வொரு சமநோக்கு வளைகோடும். இங்கு ஒரு நிறைவின் அளவைக் காட்டுகின்றது. உயரத்தை அளப்பது போல் நிறைவின் அளவை அளப்பது கடினம்- ஆனால் ஒன்றைவிட மற்றொரு சமநோக்கு வளைகோடு, அதிகம் அல்ல குறைந்த அளவு நிறைவைத் தருகிறது என்று சொல்லலாமே தவிர, எவ்வளவு நிறைவைக் கூட்டி, குறைத்துத் தருகிறது என்பதைக் கூற முடியாது. ஆகவேதான் சமநோக்கு வளைகோடுகளை 1, 2, 3 என்று இலக்கமிட்டு நிறைவுகளை வரிசைப்படுத்துகிறோம்.

இப்போது சமநோக்கு வளைகோடுகளின் வடிவத்தைப் பற்றிய அனுமானங்களை ஆராய்வோம். முதலாவதாக ஒரு சமநோக்கு வளைகோடு இடதுபுறமிருந்து வலதுபுறமாக கீழ்நோக்கிச் சாயும் வளைகோடு என்ற அனுமானத்தைக் கவனிப்போம். இது ஒரு சரியான பொருந்துகிற அனுமானமே ஏனெனில் இது கீழ்நோக்கி சரியாவிடில், படுக்கைக் கோடாக இருக்கும். அல்லது மேல் நோக்கிச் சரிந்து செல்லும் கோடாக இருக்கும். படுக்கைக் கோடாக இருந்தால், உதாரணமாக நுகர்வோர் 6 கிலோ தக்காளியுடன் 1 கிலோ, 2, 3, 4 அல்லது 5 கிலோக்கள் உருளைக் கிழங்கு வாங்கினாலும் ஒரேயளவு நிறைவுடன் இருக்கிறார் என்று அர்த்தம். இது நிச்சயமாக சரியானதல்ல. ஏனெனில் 6 கிலோ தக்காளி, 5 கிலோ உருளைக் கிழங்கு வாங்குகையில் 6 கிலோ தக்காளி, 1 கிலோ உருளைக் கிழங்கு வாங்குவதைவிட அதிக நிறைவைத் தான் எந்த நுகர்வோரும் பெறுவார். மேலும் இக்கோடு மேல் நோக்கிச் சரியும் வளைகோடாக இருந்தால், உதாரணமாக 7 கிலோ தக்காளி, 3 கிலோ உருளைக் கிழங்கு வாங்குவதும் 6 கிலோ தக்காளி, 2 கிலோ உருளைக் கிழங்கு வாங்குவதும் ஒரே அளவு நிறவைத் தருவதாக அர்த்தம். ஆனால் இது அபத்தமானது; ஏனெனில் எந்த நுகர்வோரும் 7 கிலோ தக்காளி, 3 கிலோ உருளை கிழங்கு வாங்கும்போது, 6 கிலோ தக்காளி, 2 கிலோ உருளைக் கிழங்கு வாங்குவதைவிட அதிக அளவு நிறைவையே பெறுவார். எனவே சமநோக்கு வளைகோடுகள் எப்போதும் வலதுபக்கம் கீழ் நோக்கிச் சரியும் வளைகோடு ஆகும். இரண்டாவதாக, எல்லா சமநோக்கு வளைகோடுகளும் 0 என்ற ஆதிக்குக் (convex to origin) குவிந்து இருக்கின்றன என்ற முக்கியமான ஒரு அனுமானம் ஆகும்.

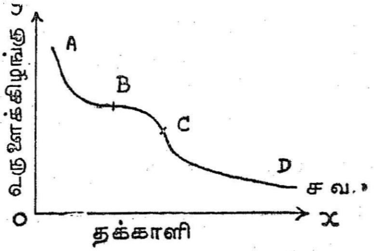
யாரும் ஒரு சமநோக்கு வளைகோட்டை ஆராயும்போது, ஒரு (பொருளின்) பண்டத்தின் "விளிம்புப் பொருளுடைமை"யை மற்ற (பொருள்) பண்டத்தின் வாயிலாக அறிய முற்படுகிறார். உதாரணமாக ஷ வரைபடத்தில் நுகர்வோர் 2-வது சமநோக்கு வளைகோட்டில் இருக்கும்போது, 4 கிலோ தக்காளி, 2½ கிலோ உருளை கிழங்கு வாங்கும்போது ஏற்படும் அதே நிறைவு, 5 கிலோ தக்காளி, 1½ கிலோ உருளைக் கிழங்கு வாங்கும்போது அவருக்கு ஏற்படுகிறது. 1 கிலோ தக்காளியின் விளிம்புப் பொருளுடைமையை உருளைக் கிழங்கின் மதிப்பில் கவனிக்கும்போது, அந்த விளிம்புப் பொருளுடைமையானது, ஐந்தாவது கிலோ தக்காளி விளிம்பு கிலோவாகும்போது, ¾ கிலோ உருளைக் கிழங்குக்குச் சமமாகிறது. ஏனெனில் துய்ப்போர் 5-வது கிலோ தக்காளி வாங்குவதற்காக ¾ கிலோ உருளைக் கிழங்கை வேண்டாம் என்று விட்டு விடுகிறார்.

எனவே விளிம்புப் பொருளுடைமையை முன் அத்தியாயத்தில் கூறியதைவிட இன்னும் வலிமையுடன் இங்கு விளக்குகிறோம். அதாவது துய்ப்போர் ஒரே சமநோக்கு வளைகோட்டில் இருக்கும் பொருட்டு. எந்த ஒரு பண்டத்தின் (இங்கு தக்காளி) விளிம்பு அலகை வாங்குவதற்காக மற்றொரு பண்டத்தின் (உருளைக் கிழங்கு) எந்த அளவை வேண்டும் என்று நிராகரிக்க முற்படுகிறரோ அந்த அளவுதான் வாங்கப்படும் முதல் பண்டத்தின் (தக்காளி) 'விளிம்புப் பொருளுடைமை'' எனப்படும். இந்த விளிம்புப் பொருளுடைமை மற்ற பண்டத்தின் (உருளைக் கிழங்கு) மதிப்பில் கணக்கிடப்படுகின்றது.

ஆகவே எந்த ஒரு புள்ளியிலும் ஒரு சமநோக்கு வளைகோட்டின் சரிவானது அந்தப் புள்ளியில் விளிம்புப் பொருளுடைமையைக் காட்டுகிறது; என்பதால் அவ் வளைகோட்டின் வடிவம் முக்கியமாகக் கவனிக்க வேண்டியது ஆகிறது. சமநோக்கு வளைகோடுகள் ஆதிக்குக் குவிந்துள்ளன என்ற அனுமானம் எந்த ஒரு வளைகோட்டின் வழியாகச் செல்கையில் விளிம்பும் பொருளுடைமையில் காணப்படும் மாற்றங்களைக் காட்டுகிறது. அதாவது Y என்ற ஒரு (பொருளை) பண்டத்தை கொஞ்சம் அதிகமாக வாங்கினுல் தனக்கு ஒரே நிறைவுதான் ஏற்படுகிறது என்று துய்ப்போர் கருதினுல், அதற்காக X-ஐக் குறைத்து (அதிகமாக) வாங்கி. Y-ன் அளவைக் கூட்டிக் (குறைத்துக்) கொள்கிறார். உதாரணமாக ச. வ. 2-ல் 5-வது கிலோ தக்காளி வாங்கி. ஒரே நிறைவைப்பெற, $\frac{3}{4}$ கிலோ உருளைக்கிழங்கை வேண்டாம் என ஒதுக்க முடிகிறது. 6-வது கிலோ தக்காளி வாங்கி, ஒரே நிறைவைப்பெற, $\frac{1}{3}$ கிலோ உருளைக்கிழங்கை வேண்டாம் என ஒதுக்குகிறார். 7-வது கிலோ தக்காளி வாங்கி, ஒரே நிறைவைப் பெற, மேலும் $\frac{1}{6}$ கிலோ உருளைக்கிழங்கை வேண்டாம் என்று ஒதுக்கி விடுகின்றார். எனவே சமநோக்கு வளைகோட்டில் ஒருவர் நகரும்போது. அந்த வளைகோடு வலது பக்கத்தில் மட்டமாகவும் இடதுபுறமாக நகரும்போது மேல்நோக்கி செங்குத்தாக நகர்ந்தும் செல்வதால், இவ்வளைகோடு ஆதிக்குக் குவிந்து காணப்படுகிறது. இங்கு முதல் பண்டம் அதிகம் வாங்கப்பட வாங்கப்பட, இரண்டாவது பண்டத்தின் மதிப்பில், முதல் பண்டத்தின் விளிம்புப் பொருளுடைமை தொடர்ந்து குறைந்தே வருவதைப் பார்க்கிறோம். மேலும் ஒரு சமநோக்கு வளைகோடு ஓரிடைவெளியில் குவிந்தும் ஓரிடைவெளியில் குழிவாகவும் (convex at one interval and c ncave at another interva) மாறி மாறியும் இருக்கமுடியாது. ஏனெனில் கீழ்க்கண்ட வரைபடத்தைக் கவனித்தால் சமநோக்கு வளைகோடு A, B, C, D என்ற புள்ளிகளின் இடைவெளிகளில்

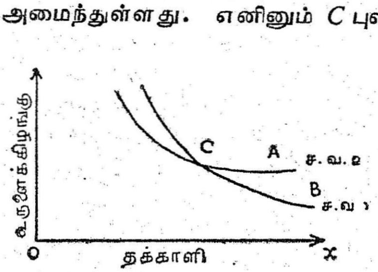
எவ்வாறு வளைந்து வளைந்து குழிவுடனும் குவிவுடனும் காணப் படுகிறது என்பது விளங்கும்.

A, *B* இடைவெளியில் வளைகோடு ஆதிக்கு விரிவாகவும் *B*, *C* இடைவெளியில் குழிவாகவும், *C*, *D* இடைவெளியில் மறுபடியும் குவிவாகவும் உள்ளது. அதாவது, (*A*, *B*), (*C*, *D*) இடைவெளிகளில் ஒரு பொருளின் (தக்காளியின்) விளிப்புப் பொருளுடைமை, உருளைக் கிழங்கின் மதிப்பில் (in terms of potatoes) குறைந்து காணப் படுகிறது. ஆனால், (*B*, *C*) இடைவெளியில் இந்த விளிம்புப் பொருளுடைமையானது அதிகமாக இருக்கிறது.



படம் 16.

அதாவது இந்த (*B*, *C*) இடைவெளியில் தக்காளியையும் அதிகமாக வாங்கி உருளைக் கிழங்கையும் அதிக அளவில் ஒரே அளவைப் பெறுகிறார் என்று அர்த்தம். ஆனால், இது சரியாக இருக்க முடியாது. இது அபத்தமான இடைவெளியாகும். எனவே எந்த ஒரு சமநோக்கு வளைகோடும் மேலே வரையப்பட்டதுபோல குவிந்து, குழிவாக இருக்கமுடியாது. எப்போதும் குவிந்தேதான் இருக்கும். மூன்றாவது அனுமானம், எந்த இரு சமநோக்கு வளைகோடுகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளாது என்பதாகும். இதன் விளக்கத்தையும் கீழ்க்கண்ட வரைபடத்தின் மூலம் உற்றுக் கவனிப்போம். ச. வ. 2-ல் *A* புள்ளியில் துய்ப்போருக்குக் காணப் படும் நிறைவு ச. வ. 1-ல் *B* புள்ளியில் காணப்படும் நிறைவைவிட அதிகமாக இருக்கிறது; ஏனெனில் *A* புள்ளி *B* புள்ளிக்கு மேலே அமைந்துள்ளது. எனினும் *C* புள்ளி (ஒரு வெட்டும் புள்ளி) இரு வளைகோடுகளுக்கும் பொதுவான ஒரு புள்ளி. வரையறைப்படி *A*, *B* என்ற இரு மாறுபட்ட நிறைவு அளவுகள், *C* என்ற புள்ளியில் சமமாக இருக்க முயற்சிக்கின்றன. இது ஏற்றுக்கொள்ளப் படமுடியாத தொன்றும். *B*, *C* புள்ளிகள் ச. வ. 1-ஐச் சார்ந்து ஒரே நிறைவுடனும், *A*, *C* புள்ளிகள்



படம் 17.

ச. வ. 2-ஐச் சார்ந்து ஒரே நிறைவுடனும் இருந்தபோதிலும் *A*-ல்

நிறைவு B-ல் நிறைவைக் காட்டிலும் அதிகம் என்பதாலும் C புள்ளி இரு சமநோக்கு வளைகோடுகளுக்கும் பொருந்தும் ஒரு புள்ளியாக இருப்பதாலும், இந்த முரண்பாடு நன்கு தெரியவருகிறது. எனவே இரு சமநோக்கு வளைகோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளவே முடியாது என்று உறுதியுடன் கூறலாம்.

இந்த மூன்று அடிப்படை அனுமானங்களைக் கொண்டு சமநோக்கு வளைகோடுகளின் அமைப்பு உண்டாக்கப்படுகிறது. துய்ப்போரின் தேவை ஆய்வுகளைக் கவனித்து ஆராயும்போது சமநோக்கு வளைகோடுகளின் இந்த மூன்று அனுமானங்களையும் மனத்தில் கொண்டு ஆராய வேண்டுபவர்களாக நாம் இருக்கிறோம்.

துய்ப்போரின் சமநிலை (Consumer's Equilibrium)

இரு (பொருட்களுக்கான) பண்டங்களுக்கான, துய்ப்போரின் விருப்பத் தரக்கோலை வரைபட விளக்கத்தின் மூலம் எப்படிக் காட்டலாம் என்பதை இப்போது பார்த்தோம். சமநோக்கு வளை கோடுகள் பல கொண்ட சமநோக்குப் படத்தை (Indifference Map)க் கொண்டு, பலவித சேர்மான மாற்றங்களில் துய்ப்போர் எவ்வாறு சமநிலையை அடைகிறார் எனக் காண்போம். இரு பொருட்களை மட்டும் எடுத்துக் கொள்ளாமல், வாங்குகின்ற எல்லாப் பொருட்களுக்குமான சமநோக்கு வளைகோட்டு வரை படங்களை முன்பு விளக்கிக் காட்டியவாறு வரையலாம். இப்படி வரைகையில், உதாரணமாக தக்காளிக்கும் உருளைக் கிழங்குக்கு மான சமநோக்கு வளைகோடு வரைவதைவிட, தக்காளிக்கும் (பணத்திற்கும்), அதன் விலைக்கும் அல்லது உருளைக் கிழங்கிற்கும் (பணத்திற்கும்) அதன் விலைக்குமான சமநோக்கு வளைகோடு வரைவது சாலச் சிறந்ததாகும். ஏனெனில் ஒரு பொருளின் மதிப்பை இன்னொரு பொருளின் வாயிலாகக் கூறுவதைவிட பண மதிப்பின் (விலையின்) வாயிலாகக் கூறுவது மிகவும் எளிதாகும். ஏனெனில் எல்லாப் பொருட்களின் மேலும் பணம் ஆட்சி செலுத்து கிறது (money represents command). இதன் மூலம் பொதுவான வாங்கும் திறன்படைத்த பணத்தையும், வாங்கப்படும் பொருளான உருளைக்கிழங்கை (உதாரணமாக)யும் கொண்டு தன் துய்ப்போரின் விருப்பங்களை, சமநோக்கு வளைகோட்டில், அமைக்கிறோம். இவ்வாறு செய்வதற்கு முன்னர், சந்தையில் விற்கும் மற்ற பொருட் களின் விலைகளைப் பற்றியும், துய்ப்போரின் வருமானம் பற்றியும், வரம்புக்குட்பட்ட பணத்தை மட்டும் சந்தையில் பொருட்கள் வாங்கச் செலவு செய்கிறார் என்பது பற்றியும் சில அனுமானங்கள் முன்பே ஏற்படுத்தியிருப்பதை திரும்பவும் நினைவு கூறுவோம். அதாவது எப்படி துய்ப்போர், எந்தப் பொருட்களை எந்த அளவில்

வாங்கினுல் ஒரே அளவு நிறைவுடன் இருக்கிருர் என்பதை சமநோக்கு வளைகோட்டின் மூலம் அறிவதற்கான அனுமானங்களாவன :

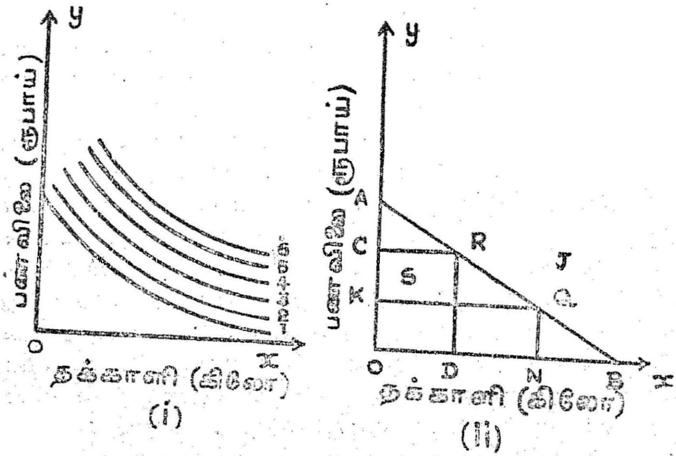
1. ஒரு பொருள், அதன் பண விலை இவற்றின் பலவித சேர்மானங்களுக்கான துய்ப்போரது விருப்பத் தரக்கோல் ஆய்வுச் சமயம் பூராவும் மாருமல் உள்ளது.

2. குறிப்பிட்ட பணமே செலவிற்காக துய்ப்போரிடம் தரப்பட்டுள்ளது; அதைக் கொண்டு, ஒரு பொருளை வாங்காவிட்டால், மற்ற பொருட்களை வெவ்வேறு அளவுகளில் வாங்கி, பூரா பணத்தையும் சந்தையில் செலவிடுகின்ருர்.

3. பல துய்ப்போர்களில் இருவரும் ஒருவர்; இவர் மற்ற எல்லாப் பொருட்களின் விலைகளையும் அறிந்து வைத்திருக்கின்ருர்.

4. எல்லாப் பொருள்களும் ஓரினத் தன்மையுடையவை (homogeneous); அத்துடன் அதன் அளவுகள் வகுபடக் கூடியவை.

5. துய்ப்போர் நேர்மையாக சீரமைப்புடன் தன் உச்ச நிறைவைப்பெற விழைகிருர்.



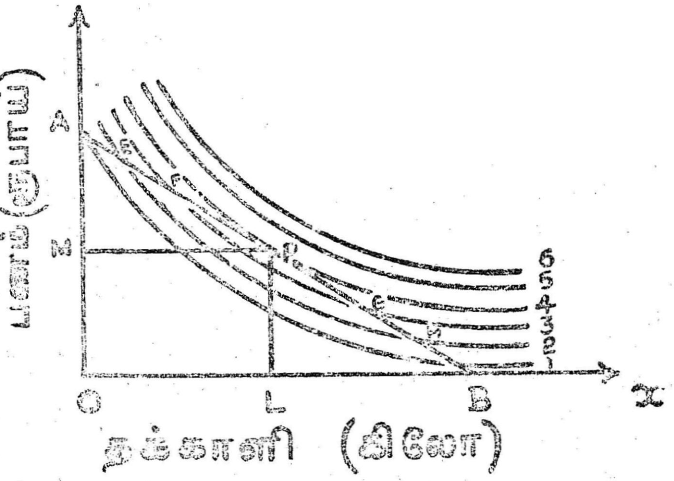
படம் 18.

இந்த அனுமானங்களின்படி எடுத்துக்காட்டாக தக்காளி வாங்குவதை அதன் விலைகளுக்கேற்ப துய்ப்போர் எவ்வாறு மாறுபட்ட அளவில் வாங்குகிருர் என்பதை இரண்டு படங்கள் மூலம் விளக்குவோம்.

இங்கு படம் 1-ல் 6 சமநோக்கு வளைகோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன. ச. வ. 1-ல் தக்காளி, பண விலை இவற்றிற்கான பல சேர்மானங்களில் ஒரே அளவு நிறைவு கிடைப்பதையும், இதைவிட அதிக அளவு நிறைவு ச. வ. 2-ல் (அதே போல 3, 4, 5, 6 ச. வ. களில்) பல சேர்மானங்களில் கிடைப்பதையும் பார்க்கிறோம். படம் 2, துய்ப்போர் தான் கொண்டு சென்ற பணத்திற்கும் தக்காளியின் விலைக்கும் ஏற்றவாறு எவ்வாறு அப்பொருளை வாங்குகிறார் என்பதை விளக்குகிறது. எடுத்துக்காட்டாக அவர் OA ரூபாய் மட்டும் எடுத்துச் செல்கிறார் எனக் கொள்வோம். எல்லாப் பணத்தையும் தக்காளி மட்டுமே வாங்க விழைந்தால் அவர் OB கிலோ தக்காளி வாங்குகிறார். எனவே தக்காளியின் 1 கிலோ விலை $\frac{OA}{OB}$ ரூபாயாகும். இதை AB கோட்டின் சரிவில் காட்டுகிறோம். இத்தகைய கோட்டின் சரிவை விலைச் சரிவு (price slope) என்று கூறுகின்றோம். துய்ப்போர் தக்காளி மட்டும் வாங்காமல் மற்ற பொருட்களும் வாங்குகிறார் என்று அனுமானித்தால், OD அளவு தக்காளியை வாங்கி OC அளவு பணத்தை மற்ற பொருட்கள் வாங்க வைத்துக் கொள்கிறார் என்போம்.

இச் சமயத்தில் அவர் AB நேர்கோட்டில் R என்ற புள்ளியில் இருக்கிறார். இதேபோல ON கிலோ தக்காளி வாங்கினால் அவரிடம் மிச்சமிருப்பது OK ரூபாய் தான். இப்போது அவர் AB கோட்டில் Q புள்ளியில் இருக்கிறார். இதே போன்று எந்த விதச் சேர்க்கைகளிலும் (AB கோட்டின் எந்தப் புள்ளிகளிலும்) தக்காளியை வாங்கி மிச்ச பணம் வைத்துக்கொள்வது எவ்வளவு என்று இக் கோட்டின் மூலம் காண்போமாதலால், இக் கோட்டை "விலை கோடு" (price line) எனக் கூறுகிறோம். அவர் வரைபடத்தில் விலை கோட்டுக்கு மேலே காணப்பட்ட J புள்ளியை அடைய முடியாது; ஏனெனில் அவர் அவ்வளவு பணக்காரரல்ல. மேலும் அவர் விலை கோட்டிற்குக் கீழே உள்ள S புள்ளியிலும் இருக்க முடியாது. ஏனெனில் அவர் அப்படி இருந்தால், எல்லாப் பணத்தையும் செலவழிக்க முடியாது. எனவே விலை கோடு, பொருளின் விலையையும் நுகர்வோரின் பணத்தையும் தரப்பட்ட பின், நுகர்வோருக்குச் சந்தையில் காணப்படும் பல சந்தர்ப்பங்களை விளக்குவதால், இந்த விலைகோட்டை "விலைச் சந்தர்ப்பக் கோடு" (price opportunity line) எனவும் அழைக்கிறோம். சமநோக்கு வளைகோடுகளோ சந்தை நிபந்தனைகளைச் சாராதவாறு நுகர்வோரின் விருப்பங்களைக் காட்டுகின்றன. இங்கு முக்கியமாகக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டியது என்ன என்றால் சமநோக்கு வளைகோடும் விலைகோடும் ஒன்றையொன்று சாராதவையாகும்.

அடுத்தபடியாக ஒரு பக்கம் சமநோக்கு வளைகோடுகளின் படத்தை கொடுத்து மறுபக்கம் சந்தை நிபந்தனைகள் தரப்பட்டிருந்தால் அப்போது நுகர்வோர் எவ்விதம் சமநிலை அளவை அடைகிறார் என்று கவனிப்போம். முன்னே வரைந்த இரு படங்களையும் ஒன்று சேர்த்து கீழ்க் கண்டவாறு சமநோக்கு வளை கோட்டுப் படத்தின்மேல் விலை கோட்டைப் பொருத்தியவாறு வரைவோம்.



படம் 19.

நுகர்வோர் உச்ச கட்ட நிறைவைப் பெறுவதற்காக எப்போதுமே குறி வைத்திருப்பதால் அவர் முடிந்த வரையில் உயர்ந்த சமநோக்குக் கோட்டை அடைய முயற்சி செய்வார். ஆனால் அவர் அப்படிச் செய்யும்போது தன்னிடம் இருக்கும் OA பணத்திற்குள் தான் செலவு செய்ய வேண்டும் என்றும், தக்காளியின் விலை 1 கிலோவுக்கு $\frac{OA}{OB}$ ரூபாய்தான் என்பதும் அறிந்துகொண்டு தன் எல்லையைக் கண்டு கொள்கிறார்.

நுகர்வோர் A புள்ளியில் ஆரம்பிக்கையில், ஒரு தக்காளியும் வாங்காமல், எல்லா OA பணத்தையும் கையில் வைத்துக் கொண்டுள்ளார். இப்போது அவர் ச. வ. 1-ல் இருக்கிறார். ச. வ 2-ல் E என்ற புள்ளிக்கு நகர்ந்து தன் நிறைவை (சிறிதளவு தக்காளி வாங்கி, கொஞ்சம் பணம் செலவிட்டு மீதிப் பணத்தைத் தக்க

வைத்துக் கொண்டு) அதிகமாக்கிக் கொள்ளுகிறார். இப்போது F என்ற புள்ளிக்கு நகர்ந்து இன்னும் கொஞ்சம் பணம் செலவு செய்து தக்காளி இன்னும் கூடிய அளவு வாங்கி முன்னைவிட அதிக நிறைவைப் பெற்று ச. வ. 3-ல் இடம் பெறுகிறார். E-யிலும் F-யிலும் தக்காளிக்காக இன்னும் பணம் செலவழித்து மீதிப் பணத்தை மற்ற பொருட்கள் வாங்குவதற்காக வைத்திருந்தாலும், E-ல் கிடைக்கும் நிறைவைவிட F-ல் தான் அதிக நிறைவை அடைகின்றார். ச. வ. 4-ல் உள்ள P புள்ளிக்குச் செல்லும்போது மிக அதிக நிறைவைப் பெறுகிறார். P-ஐ அடைந்த பின்னர் அவரால் அதிக நிறைவை மேற்கொண்டு அடைய முடியவில்லை. இன்னும் அதிகமாக தக்காளி வாங்கினால் அவரது நிறைவு கூடுவதற்குப் பதிலாகக் குறைய ஆரம்பிக்கிறது. அப்படிக் கூட வாங்கினால் அவர் ச. வ 3-ல் உள்ள G என்ற புள்ளிக்கு திரும்பி வருகிறார்; அதாவது ச. வ. 4-லிருந்து ச. வ. 3-க்கு வருவதால் அவருடைய நிறைவு குறைகிறது. இதேபோல ச. வ. 2-ல் உள்ள H-க்கு (மேலும் அதிகமான தக்காளி வாங்கும்போது) வந்து குறை நிறைவைப் பெறுகிறார். எனவே ச. வ. 4-ல் தான் அவரது நிறைவு உச்ச கட்டத்தில் இருந்தது. ஆதலால் P என்ற புள்ளியே அந்தத் துய்ப்போருக்கான சாலச் சிறந்த சமநிலைப் புள்ளி (optimum equilibrium position) ஆகும். அப்புள்ளியில் தான், அந்த நிலையில் தான் அவர் உச்சகட்ட நிறைவைப் பெறுகின்றார். விலை கோட்டில் P-க்கு மேலே உள்ள எந்தப் புள்ளியிலும் (அதாவது E அல்லது F புள்ளியில்) தக்காளியின் விளிம்புப் பொருளுடைமை பண மதிப்பைவிடக் கூடுதலாகவும், P-க்குக் கீழே உள்ள புள்ளிகளில் (அதாவது G அல்லது H புள்ளியில்) தக்காளியின் விளிம்புப் பொருளுடைமை பண மதிப்பில் தாழ்ந்தும் காணப்படுகிறது. P என்ற புள்ளியில் மட்டுமே தக்காளியின் விளிம்புப் பொருளுடைமை பண மதிப்பில் சரி சமமாகக் காணப்படுவதால், துய்ப்போருக்கு சமநிலை ஏற்படுகிறது. இது எப்படி ஏற்படுகிறது என்றால் P என்ற புள்ளியில் சமநோக்கு வளைகோடு 4-ன் சரிவும் விலை கோட்டின் சரிவும் ஒரே அளவுடையதால் தான்.

(தக்காளியையும்) ஒரு பொருளையும் பணத்தையும் சேர்த்து ஆராய்ந்ததற்குப் பதிலாக இரு நுகர்ச்சிப் பொருட்களைச் சேர்த்து ஆராய்ந்தால் அதற்கான வரைபடத்தைக் (கீழே காண்க) கவனிப்போம். X என்ற பொருள் x அச்சிலும், பொருள் Y ஆனது y அச்சிலும் அளவிடப்படுகின்றது. துய்ப்போரின் (வருமானம்) செலவிடும் பணம் வரையறுக்கப்பட்டு வரம்புக்குட்பட்டதாக உள்ளது என்ற அனுமானத்தில இரு பொருட்களையும் எந்தெந்த அளவில் வாங்கி நிறைவு அடைகிறார் எனப் பார்ப்போம். X பொருளில் OA அளவு

வாங்கி Y வாங்காமலேயே இருக்கலாம். அல்லது Y பொருளில் OB அளவு வாங்கி X வாங்காமலேயே இருக்கலாம். விலைகோடு A, B ஆனது, X, Y இவற்றின் எல்லாச் சேர்மானங்களையும் புள்ளிகளாகக் கொண்டது. AB கோட்டின் சரிவு செங்குத்தாக ஆக, X-ன் விலையும் Y-ன் மதிப்பில் அதிகமாக ஆகிறது. AB-ன் சரிவு X, Y பொருட்களின் (பண) விலைகளின் விகிதத்தைக் குறிக்கிறது. ச.வ. 3-ல் துய்ப்போரின் நிறைவு உச்ச கட்டத்தில் உள்ளது. இவ் வளை கோட்டில் X-ல் OA' அளவும் Y-ல் OB' அளவும் வாங்கி Q புள்ளியில் சமநிலையை அடைகின்றார். Q புள்ளியில் X, Y-ன் விலைகளின் விகிதங்கள் அதாவது $\frac{OB}{OA}$, X-ன் விளிம்புப் பொருளுடைமைக்குச் (Y-ன் மதிப்பில்) சமமாக உள்ளது. இந்த சமநோக்கு வளைகோட்டு ஆய்வு பலவித பொருளாதாரப் பிரச்சினைகளில் நீட்டிக்கப்படுகிறது. ஆங்கு பொருட்கள் நுகர்ச்சிப் பொருட்கள், மூலதனப் பொருட்கள், வேலை ஓய்வு, அல்லது பணம் ஆகும். அச் சமயங்களில் எல்லாப் பொருட்களின் (பண மதிப்பில்) விளிம்புப் பொருளுடைமையானது அப் பொருள்களின் விலை மதிப்புக்குச் சமமாக இருக்கையில் துய்ப்போர் பெரு நிறைவு பெறுவதைக் காணலாம்.

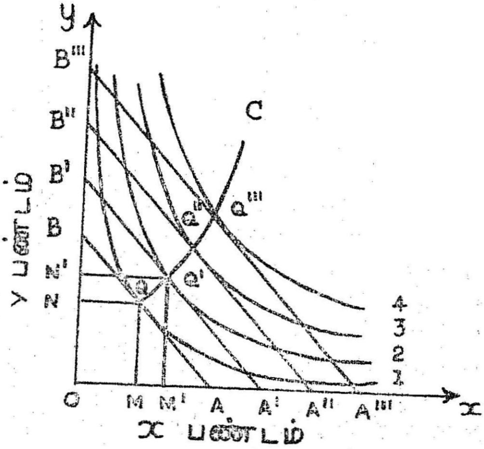
வருமான விளைவு (Income Effect)

ஒரு சமநோக்கு வளைகோட்டு வரைபடத்தில், சமநோக்கு வளை கோட்டையும் விலை கோட்டையும் கொண்டு துய்ப்போர் எவ்வாறு சமநிலை அடைகிறார்; உச்சக் கட்ட உறுதி பெறுகிறார் எனப் பார்த்தோம். அப்போது அவர் சில நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு உச்ச நிறைவு பெற்று சமநிலை அடைகிறார் என்றோம். அந்த நிபந்தனைகள் மாறும்போது மூன்று முக்கிய விளைவுகள் ஏற்படுகின்றன. முதலாவதாக, துய்ப்போரின் வருமானம் மாறும்போது, விலைகள் நிலையாக இருந்து, அவர் அதிக பணத்தை ஷ பொருட்களின் ஆய்வுக்காக செலவிடுகையில் முன்னைவிட அதிக நிறைவைப் பெற்று முன்னைவிட (சந்தோஷமாக) மகிழ்ச்சியாக இருக்கிறார். இம்மாற்றத்தால் ஏற்படும் விளைவை வருமான விளைவு எனக் கூறுகின்றோம்.

இரண்டாவதாக, இப்படியும் நிகழலாம். அதாவது பொருளின் விலையும் மாறி, பண வருமானமும் மாறலாம். விலை கூடி வருமானம் குறையலாம்; விலை குறைந்து வருமானம் கூடலாம். இத்தகைய இரு சமயங்களில் துய்ப்போர் முன்னைவிட செழிப்பாகவோ அல்லது வறுமையாகவோ ஆகவில்லை. முன் போலவே இருக்கிறார் எனக் கொள்வோம். ஆகவே விலை குறைந்த பொருட்களை அதிகமாக

வாங்கி விலை ஏறிய பொருட்களை குறைவாக வாங்கி சரி கட்டுகிறார். இப்படிப் பொருட்களை பதிலீட்டுவதால் (substitute) இவ் விளைவை பதிலீட்டு விளைவு அல்லது பதிலீட்டுப் பயன் (substitution Effect) என்று கூறுகிறோம்.

மூன்றாவதாக, பண வருமானம் மாறாமல் நிலையாக இருந்து' விலைகள் மாறலாம். இதனால் துய்ப்போர் பயன் பெற்றோராகலாம்; அல்லது பயன் குறைந்தோராகலாம். இங்கு 'பதிலீட்டுப் பயன்' விளைவாக துய்ப்போர் தான் வாங்கும் பொருட்களின் அளவுகளை மாற்றியமைப்பது மட்டுமல்ல; அத்துடன் அவரது "உண்மை வருமான"மும் (real income) (பொருள்களின் வாயிலாக தன் வருமானம்) மாறுபடும். எனவே அங்கு ஒரு வருமான விளைவும் ஏற்படுகிறது; இதனால் துய்ப்போர் பயன் பெற்றவராகலாம்; அல்லது பயன் பெறாமலும் போகலாம். நிபந்தனைகளில் இத்தகைய மாற்றங்களின் விளைவை "விலையின் விளைவு" அல்லது "விலையின் பயன்" (Price effect) எனக் கூறுகிறோம். ஒரு பக்கத்தில் வருமான விளைவு மறுபக்கத்தில் பதிலீட்டு விளைவு ஆகிய இவ்விரு விளைவு களின் சேர்மானமே விலையின் விளைவு ஆகும்.



படம் 20.

ஒவ்வொரு விளைவையும் இப்போது தனித்தனியாக விரிவாகப் பார்க்கலாம்.

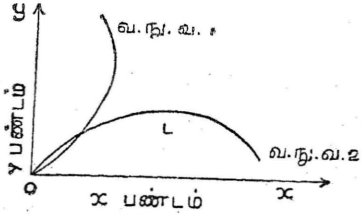
துய்ப்போரின் வருமான மாற்றத்தால் ஏற்படும் விளைவை ஒரு சம நோக்கு வளைகோட்டுப் படத்தில் காட்டலாம். உதாரணமாக,

பொருட்களின் விலைகள் நிலையாக இருக்கையில், வருமானம் உயர்ந்ததால், அதிகம் செலவு செய்ய துய்ப்போர் முன் வருகிறார் எனக் கொள்வோம். இதனால் ஏற்படும் விளைவை மேற் கண்ட படம் விளக்குகிறது.

X-ன் வாயிலாக OA ரூபாய் வருமானத்தில் ஒரு நுகர்வோர் ச. வ. 1-ல் இருந்து கொண்டு Q புள்ளியில் சமநிலையை அடைகிறார். அந்நிலையில் (அப்புள்ளி)யில் X பொருளில் OM அளவும், Y பொருளில் ON அளவும் வாங்குகிறார். இப்போது அவரது வருமானம் X-ன் மதிப்பில், OA' ஆக உயர்ந்து அல்லது Y-ன் மதிப்பில் OB' ஆக உயர்ந்து இருப்பதாகக் கொள்வோம். எனவே துய்ப்போர் பழைய சமநிலையிலிருந்து Q' என்ற புள்ளியில் புதிய சமநிலையை அடைகின்றார். தற்சமயம் X-யிலும் Y-யிலும் அதிக அளவு பொருள் பெற்று ச.வ. 2-ல் இருந்து முன்னைவிட அதிக நிறைவு பெறுகிறார். அதாவது வருமானம் அதிகமாகிவிடவே, X பொருளையும், Y பொருளையும் அதிகமாக வாங்கி நுகர்கிறார். இதேபோல் அவரது வருமானம் மேலும் பெருகும்போது Q'', Q''' என்ற புது சமநிலைப் புள்ளிகளில் (அதாவது ச. வ. 3, 4-களில்) துய்ப்போர் காணப்படுகிறார். இதே போன்ற பலவித Q புள்ளிகள் கிடைத்தால் $Q—Q''—Q''—Q—'''—Q^{(4)}$ ...என்ற ஒரு கோடு நமக்குக் கிடைக்கிறது. இதை $O — Q — Q''' — OC$ என்ற வளைகோடாக கருதுவோம். இதை "வருமான — நுகர்ச்சி வளைகோடு" (வ. நு. வ) (Income-Consumption Curve) என்று அழைக்கிறோம். பொருட்களின் விலைகள் நிலையாக இருக்கையில் வருமான மாற்றம் ஏற்படும் போது, இந்த இருபொருள்களும் எவ்வாறு நுகரப்படுகின்றன என்பதைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டியதே வருமான நுகர்ச்சி வளைகோடு ஆகும். விலைகள் மாறுபட்டால், இந்த வ. நு. வளை கோடுகளும் மாறுபடும். எனவே இரு பொருள்களின் வெவ்வேறு சார்புடைய விலைகளுக்கும், வெவ்வேறு வ. நு. வளைகோடுகள் உண்டு. எனவே ஒரு வருமான நுகர்ச்சி வளைகோடு துய்ப்போரின் வருமானம் மாறுகையில் வருமான விளைவை நன்கு விளக்கிக் காட்டுகிறது.

இங்கு வ. நு. வளைகோட்டின் வடிவைக் கவனிப்போம். வ. நு. வளைகோடுகள் இடமிருந்து வலம்நோக்கி மேல் சரிவுடன் உள்ளவை. துய்ப்போரின் வருமானம் கூடுகையில், இருபொருள்களின் அளவுகளையும் அதிகமாக வாங்கி நுகருகிறார். கீழ்க்கண்ட வரைபடத்தில் வ. நு. வ. 1 இடம் நோக்கி மேல் சரிவுடன் இருக்

கிறது. வ. நு. வ. 2-ல் சரிவு வலதுபுறம் கீழ்நோக்கி வளைந்து தாழ்கிறது. சில சமயங்களில் இதுபோல நேரிடலாம். இச்சமயங்களில் துய்ப்போரின் வருமானம் கூடக்கூட, இருபொருள்களையும் அதிகமாகி வாங்கி வருபவர், ஒரு நிலையைத் தாண்டியபின், ஏதாவது ஒன்றைக் குறைத்து வாங்க விழைகிருர். அதாவது துய்ப்போர் வறுமையிலிருக்கும் போது அதாவது குறைந்த வருமானத்தில் ஒரு பொருளை அதிகமாக வாங்கி நுகர்கிருர்;



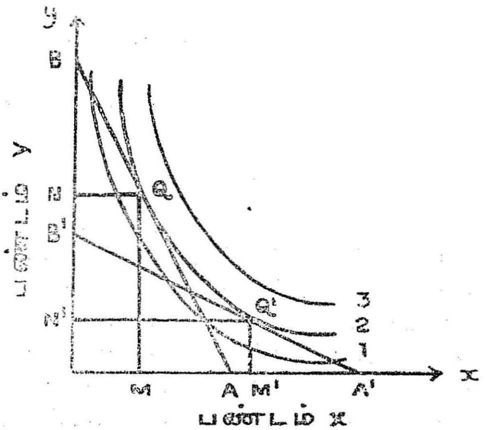
படம் 21.

ஆனல் வசதி கூடியபின் அதாவது வருமானம் கூடியபின் அப்பொருளுக்குப் பதிலாக தரமான மாற்றுப் பொருளை குறைந்த அளவில் வாங்கி நுகருகிருர். இத்தகைய பொருட்கள் பொருளாதாரத்தில் "கீழ்த்தரப் பண்டங்கள்" அல்லது "மட்டரகப் பண்டங்கள்" (Inferior goods) என அழைக்கப்படுகிறது. ஷ படத்தில் வ. நு. வ. 1-ல் *X* ஒரு கீழ்த்தரப் பண்டமாகிறது. வ. நு வ. 2-ல் *Y* ஒரு கீழ்த்தரப் பண்டமாகிறது. வ. நு வ. வலதுபக்கம் மேல்நோக்கிச் சரிந்தால் இயல்பான முறையில் சரிந்தால் இரு பண்டங்களுக்குமான வருமான விளைவு நேர்மறையில் இருக்கும்; அதாவது மிகையாக (positive) இருக்கும். அது கீழ் நோக்கிச் சென்ருலோ அல்லது பின்புறம் சென்ருலோ, ஒரு புள்ளியைத் தாண்டியபின், வருமானவிளைவு எதிர்மறையில் (negative) இருக்கும்; அல்லது குறைவாக இருக்கும். இங்கு வ. நு. வ. 2-ல் *L* என்ற புள்ளிக்குப் பின்னர், வருமான விளைவு எதிர்மறையில் காணப்படுகிறது.

பதிலீட்டுப் பயன் (Substitution Effect)

பண்டங்களின் விலைகள் மாறும்போது, துய்ப்போர் முன்னைப் போலவே அதே அளவு நிறைவைப் பெறுவதற்கு புது விலைகளுக்குத் தக்கவாறு தான் வாங்கும் இப்பண்டங்களின் அளவுகளை மாற்றியமைக்கிருர். இச் சமயத்தில்தான் பதிலீட்டுப் பயன் ஏற்படுகிறது. கீழே வரையப்பட்ட படம் இதனை விளக்குகிறது. சமநோக்கு வளைகோடு 2-ல் *Q* என்ற புள்ளியில் *OM* அளவு *X* பண்டத்தையும், *OV* அளவு *Y* பண்டத்தையும் வாங்கி துய்ப்போர் நிறைவு பெறுவதுடன் சமநிலையில் இருக்கிருர். *Y* பண்டத்தின் மீது ஒரு உதவிக்கொடை (Subsidy) தரப்பட்டிருந்த

தாகக் கொள்வோம். இப்போது அந்த உதவிக்கொடை நிறுத்தப் பட்டுவிட்டபின் Y-ன் புதிய விலை முன் விலையைவிடக் கூடுதலாக இருக்கும். முன்னைய Y-ன் விலை X-ன் மதிப்பில் $\frac{OA}{OB}$ என்றால், Y-ன் புதிய விலையானது (Xன் மதிப்பில்) $\frac{OA'}{OB'}$ ஆகிறது.



படம் 22.

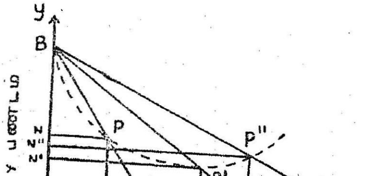
துய்ப்போருக்கு Y-ன் விலை அதிகரித்ததைச் சரிக்கட்ட X-ன் மதிப்பில் துய்ப்போரின் வருமானம் கூட்டப்படுகிறது எனக் கொள்வோம். அதாவது துய்ப்போரின் வருமானவரி (X மதிப்பில்) தளர்த்தப்படுகிறது; எந்த அளவு தளர்த்தப்படுகிறது என்றால் Y-ன் விலை 'அதிக'த்தைச் சரிக்கட்டும் அளவு தளர்த்தப்படு கின்றது. இதை வேறுவிதமாகக் கூறினால், Y-ன் கூடுவதைப் பொறுத்து அதற்கேற்றவாறு X-ன் மதிப்பில் வருமானம் கூட்டப் பட்டு துய்ப்போரின் முன்னைய நிறைவும் புதிய நிறைவும் ஒரே அளவு இருப்பதுபோல் நிலைமை மாறுபடுகிறது எனலாம். Y-ன் விலை கூடியபோது, X பண்டத்தை OA அளவிலிருந்து OA' அளவுக்கு வாங்குகின்றவாறு துய்ப்போரின் வருமானம் கூடி யிருக்கிறது. இத்தகைய வருமானத்தில் ஏற்படும் உயர்வானது Y-ன் விலை உயர்வைச் சரிக்கட்ட ஏற்பட்டதால், துய்ப்போரின் வருமானத்தில் ஏற்படும் மாறுபாட்டை "சரிக்கட்டும் மாறுபாடு" (Compensating variation) என்று கூறுகிறோம். X-ன் மதிப்பு இம் மாறுபாடு AA' அளவுக்குச் சமமாக இருக்கும். இவ்வாறு Y-ன்

விலை உயர்வுக்கேற்றவாறு துய்ப்போரின் வருமானம் சரிக்கட்டப்பட்ட அளவு மட்டுமே உயர்ந்ததால், அவர் இன்னும் ஒரேயளவு நிறைவு பெற்று அதே சமநோக்கு வளைகோட்டில் இருக்கின்றார். எனினும் அதே வளைகோட்டில் முன்பு Q புள்ளியிலும் இப்போது Q' புள்ளியிலும் அவர் சம நிறைவைப் பெற்று சமநிலையில் இருந்தாலும், Q-லிருந்து Q'-க்கு நகரும் நகர்வு ஒரு பதிலீட்டுப் பயனை (பதிலீட்டு விளைவை)க் காட்டுகிறது. கிடைப்பதற்கரிய பண்டமான Y-ஐ (ஏனெனில் விலை கூடிவிட்டது)க் குறைத்து வாங்கி அந்தக் குறைவை நிறை செய்ய மலிவான பண்டமான X-ஐ அதிகமாக பதிலீட்டு செய்கிறார். இந்த பதிலீட்டுப் பயன் சமநோக்கு வளைகோட்டின் மேலேயே நகர்ந்துவரும் இரு வேறு புள்ளிகளின் மூலம் நன்கு புலப்படுகிறது.

விலைபயன் அல்லது விலையின் விளைவு (Price Effect)

இங்கு இரு பொருட்களின் சார்புடைய விலைகள் (relative prices) மாறி, துய்ப்போரின் வருமானம் சரிக்கட்டுமாறு, மாறாமல் இருந்தால் இந்த "விலை பயன்" ஏற்படுகிறது. துய்ப்போர் முன்னைவிட அதிக நிறைவையும் பெறலாம்; அல்லது குறை நிறைவையும் பெறலாம். பொருட்களின் விலைகள் மாறியுள்ளதால், அவரது 'உண்மையான' வருமானம் ('real' income) கூடலாம்; அல்லது குறையலாம். இதை விளக்கும் படத்தைக் கீழே காண்க.

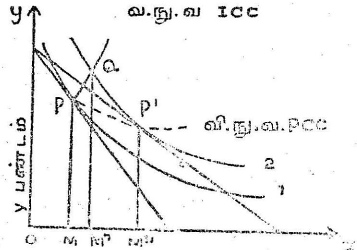
X பொருளில் OM அளவும் Y பொருளில் ON அளவும் வாங்கி கீழே உள்ள படத்தில் P என்ற புள்ளியில் துய்ப்போர் ஒரு சம நிலையில் இருக்கிறார். இவர் X மட்டுமே வாங்குவதானால் தன் கையிலுள்ள எல்லாப் பணத்தையும் செலவிட்டால், OA அளவு X பொருளை வாங்க முடியும். அவர் பண வருமானம் நிலையானது என்ற அனுமானத்தில், இப்போது X-ன் விலை குறைகிறது எனக் கொண்டால், தன் கையிலிருக்கும் எல்லாப் பணத்தையும் கொண்டு அவரால் இப்போது OA-க்குப் பதிலாக AO' அளவு X பொருளை வாங்க முடியும். Y-ன் விலை நிலையானதென்பதால், துய்ப்போரின் வருமானம், Y-ன் மதிப்பில், எப்போதும் OB அளவேதான். துய்ப்போரின் புதிய சமநிலையானது X-ல் OM' அளவும், Y-ல் ON' அளவும்



படம் 23.

வாங்கும்போது P' என்ற புள்ளியில் ஏற்படுகின்றது. X-ன் விலை இன்னும் குறைந்தால், அவர் தன் நிலையான வருமானத்தில் (எல்லாப் பணத்திலும்) X மட்டுமே வாங்குவதானால், OA'' அளவு வாங்கி, P'' என்ற புதிய சமநிலைப் புள்ளியில் இருப்பார். எனவே X-ன் விலையின் ஒவ்வொரு மாற்றத்துக்கும், விலை கோட்டின் சரிவும் மாறுகிறது. பொருள் மலிவாக மலிவாக, விலைகோட்டின் சரிவும் தாழ்வாக ஆகிறது. இப்போது P, P' P'' ... வழியாக ஒரு வளைகோடு வரைந்தால் அதை 'விலை—நுகர்ச்சி வளைகோடு' (Price consumption curve) என்கிறோம். X-ன் விலை மாறும்போது X பொருளின் நுகர்ச்சி எவ்விதம் மாறுகிறது என்பதை இவ் வளைகோடு காட்டுகிறது. ஆனால் இச் சமயத்தின் Y-ன் விலையோ துய்ப்போரின் வருமானமோ (Y-ன் மதிப்பில்) மாறுபடவில்லை என அறியலாம்.

துய்ப்போரின் சமநோக்கு வளைகோட்டுப்படம் வரையப்பட்டு, இரு பொருட்களின் விலைகளும் அதில் காட்டப்பட்டு இருந்தால், அந்த வரைபடத்திலேயே வருமான—நுகர்ச்சி வளைகோட்டையும், விலை-நுகர்ச்சி வளைகோட்டையும் நாம் உருவாக்க முடியும். (படத்தைக் காணவும்). ச. வ. 1-ல் Q புள்ளியில் ஒருவர் சமநிலை அடைவதைப் படத்தில் காண்கிறோம். இப்போது Q என்ற அதே புள்ளியில் ஆரம்பித்துச் செல்லும் வருமான—நுகர்ச்சி வளைகோட்டையும், விலை நுகர்ச்சி வளைகோட்டையும் வரைய முடியும். (நுகர்வோர்) துய்ப்போர் யாராயிருந்தாலும்,



X பண்டம்
படம் 24.

வி. நு. வ. PCC வளைகோடு சமநோக்கு வளைகோடு 1-க்கும், வருமான நுகர்ச்சி வளைகோடு ICCக்கும் இடையே இருப்பதைக் காணலாம்.

X-ன் விலை குறையும்போது துய்ப்போர் P சமநிலைப் புள்ளியிலிருந்து P' என்ற சமநிலைப் புள்ளியை அடைகிறார். இதையே இப்படியும் கூறலாம். அவர் P-லிருந்து Q-க்கு வந்து பிறகு Q-லிருந்து P'-க்கு வருகிறார். இந்த இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் எதை விளக்குகின்றன என்றால், வருமான—நுகர்ச்சி வளைகோட்டில் (ICC-ல்) P-லிருந்து Q-செல்கிறார்; பிறகு சமநோக்கு வளைகோட்டில் (2-ல்) ஒரே அளவு நிறைவைத் தரும் மற்றொரு புள்ளி P'-ஐ அடைகிறார்.

முதல் நிகழ்ச்சி வருமான விளைவையும் இரண்டாவது நிகழ்ச்சி ஒரு பதிலீட்டு விளைவையும் காட்டுகிறது. அதாவது துய்ப்போரின் வருமானம் கூடுவதால் ஏற்பட்ட வருமான விளைவை ஒட்டி நிறைவைப் பெருக்கிக் கொள்ள ச. வ. 1-லிருந்து ச. வ. 2-க்குச் செல்கிறார். அதாவது *P*-லிருந்து *Q* செல்கிறார். இதை வ. நு. வளை கோட்டிலும் காணலாம். இரண்டாவதாக *X*-ன் விலை குறைவாக இருப்பதால், பதிலீடு செய்யும் நோக்கத்துடன் ச. வ. 2-ன்மேல் *Q* என்ற புள்ளியில் *P'* என்ற புள்ளிக்கு வந்து பதிலீட்டுப் பயனை அடைகிறார். எனவே, விலையின் மாற்றத்தின் விளைவு மேற்கூறிய இரு செய்கைகளின் கூட்டு விளைவாகும். எனவே விலைபயன் அல்லது விலையின் விளைவு ஆனது வருமான விளைவு, பதிலீட்டு விளைவு இவற்றின் நிகர முடிவு (net result) ஆகக் கருதப்படுகிறது.

கீழ்த் தரப் பண்டங்கள் (Inferior goods)

துய்ப்போரின் வருமானம் அதிகரிக்கையில் (பொருட்கள்) பண்டங்கள் இரண்டையும் அதிகமாக வாங்கி துய்ப்போர் அதிக நிறைவைப் பெறுவார் என்று நாம் எதிர்பார்க்கின்றோம். சில பொருட்கள் விஷயத்தில் அவர் அவ்வாறு செய்யலாம். சில பண்டங்களின் விஷயத்தில் சில சமயங்களில் அவர், தன் வருமானம் பெருகிய பின்னர், ஒரு பண்டத்தை முன்னைவிடக் குறைவாகப் பயன்படுத்துவதைப் பார்க்கிறோம். அவர் ஏழையாக இருந்த சமயத்தில் அத்தகைய பண்டங்களை அதிகமாக வாங்கிப் பயன்படுத்தியிருக்கிறார். தன் வருமான நிலை உயர்ந்த பின்னர் அப்பண்டத்தில் உயர்ந்த ரகத்தை முன்னைவிட குறைந்த அளவில் பயன்படுத்துவதைக் காணலாம். இத்தகைய பண்டங்களை மட்ட ரகப் பண்டங்கள் (Inferior goods) என அழைக்கிறோம். இங்கு வருமான விளைவு நேர்மறையில் (மிகையாக) இருப்பதற்குப் பதிலாக எதிர்மறையில் (குறையாக) இருக்கிறது.

கிஃபனின் முரண்பாடு (Giffen's Paradox)

சில பண்டங்களுக்கான வருமான விளைவு மிகவும் எதிர் மறையில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். அதாவது அதன் பதிலீட்டு விளைவு நேர்மறையில் இருந்து அதைச் சரிக்கட்ட முயன்றாலும் எதிர்மறை வருமான விளைவு முன்கூறியதைவிட அதிகமாக இருந்தால், துய்ப்போர் விலை குறைகையில் அப்பண்டத்தை குறை வாகவும், விலை அதிகரிக்கையில் பண்டத்தை அதிகமாகவும் வாங்குவார். அப்பண்டத்தின்மீது அவர் செலவிடும் தொகையின் விகிதாசாரம் மிகவும் அதிகமாகவும் இருக்கும்போதுதான் அவர் ஆட்டிச் செயல்படுகிறார். இத்தகைய பண்டத்தை மட்டரக

பண்டம் அல்லது கீழ்த்தரப்பண்டம் என்று முன்பே விளக்கியுள்ளோம். இதை "கிஃபனின் பண்டம்" (Giffen good) என்றும் அழைக்கலாம். ஏன் இந்தப் பெயர் வந்தது என்ருல், 19-ம் நூற்ருண்டில் ரொட்டியின் விலை உயர்ந்தபோது, ஏழைப் பாட்டாளி மக்களின் 'உண்மையான' வருமானம் மிகவும் குறைந்தது. ஆகவே அவர்கள் விலை உயர்ந்த உணவு வகைகள், ஆட்டிறைச்சி போன்றவற்றைச் சாப்பிடுவதை நிறுத்திவிட வேண்டிய அவசியம் ஏற்பட்டது. எனவே அச்சமயத்தில் ரொட்டியின் விலை அதிகமாகி இருக்கிறது என்று தெரிந்தும் அந்த சமயத்தில் அதுதான் இருப்பதிலேயே மலிவான உணவு என்பதால், நிறைய வாங்கிச் சாப்பிட்டனர். ரொட்டியின் விலை பின்னர் குறைந்தபோது, அதைக் கொஞ்சம் தான் வாங்கிச் சாப்பிட்டனர். ஏனெனில் அவர்களது உண்மை வருமானம் உயர்ந்து, அவர்கள் இன்னும் ரொட்டியையே தின்பது என்று எண்ணி அதைக் குறைத்து விதவிதமான உணவு வகைகளைச் சாப்பிட ஆரம்பித்தனர். இதை சர் ராபர்ட் கிஃபன் (Sir Robert Giffen) என்பவரின் ஆதாரமாகக் கொண்டு அத்தகைய பண்டத்தை கிஃபன் பண்டம் என்று அழைக்கின்ருேம்.

நேர் பதிலீட்டு விளைவைவிட, எதிர்மறை வருமான விளைவினுல் X என்ற பண்டம், விலைகுறைந்தபோதும், குறைவாகவே வாங்கப்படுகின்றன. இத்தகைய நிலைமைகள் சந்தேகமற, இயல்பற்ற நிலைமைகள் தான் என்ருலும் சிற்சில சமயங்களில் இவ்வாறு நிகழத் தான் செய்கின்றன. இதைத்தான் நாம் கிஃபனின் முரண்பாடு (Giffen's paradox) என்கிருேம்.

சமநோக்கு வளைகோடுகள்

பயிற்சிகள்

1. சமநோக்கு வளைகோடுகள் என்ருல் என்ன? அவை துய்ப்போரின் இயங்கும் முறையை விளக்குவதற்கு எவ்வாறு பயன்படுகின்றன?

2. சமநோக்கு வளைகோடுகளின் பொதுப் பண்புகளையும் அவற்றின் பயன்களையும் விவரித்து ஆராய்க.

3. சமநோக்கு வளைகோடு ஏன் ஆதிக்கு (கீழிலிருந்து) குவிந்து காணப்படுகிறது?

4. எவ்வாறு பயன்பாடு ஆய்வைவிட சமநோக்கு வளை கோட்டுத் தத்துவம் மேம்பாடு உடையது என்பதை விளக்குக.

5. வருமான விளைவுக்கும் பதிலீட்டு விளைவுக்கு மிடையே உள்ள ஒற்றுமை வேற்றுமைகளை விவரி. ஒருபுறம் வருமான விளைவு, மறுபுறம் பதிலீட்டு விளைவு இவற்றின் ஒரு சேர்மானமே விலையின் வளைவு எவ்வளவு என்பதை விளக்குக.

6. துய்ப்போரின் சமநிலை என்றால் என்ன ? அவர் எவ்வாறு அந் நிலையை அடைகிறார் ? விளக்குக.

7. விலை நுகர்ச்சி வளைகோடு, வருமான நுகர்ச்சி வளைகோடு இவை இரண்டின் சிறப்பினையும் விளக்கமாகக் கூறுக. எந்த நிபந்தனைகளில், விலை நுகர்ச்சி வளைகோடு ஒரு தேவை வளை கோடாகும் ? விளக்குக.

8. துய்ப்போர் சமநிலைக் கோட்பாடு (கணித முறையில்)

(Mathematical treatment of the Theory of Consumer equilibrium)

பயன்பாட்டுச் சார்பலன் (Utility function)

துய்ப்போர் இரு பொருள்களை வாங்குவதாகக் கொள்வோம். அவருடைய பயன்பாட்டுச் சார்பலன்,

$U = f(q_1, q_2)$ என வரையறுப்போம்

இங்கு q_1, q_2 என்பன முறையே Q_1, Q_2 என்ற முதல் இரண்டாம் பொருள் வாங்கித் துய்க்கும் அளவுகளாகும்.

$f(q_1, q_2)$ என்பது ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பலன்; இதற்கு தொடர்ச்சியான முதல், இரண்டாம் வரிசை பகுதிவகைக் கெழுக்கள் உள்ளன என்று கொள்வோம். இதைப்போன்று ஒரே ஒரு பயன்பாட்டுச் சார்பலன்தான் இருக்கும் என்று கூறிட முடியாது. பொதுவாக, q_1, q_2-ன் ஏறும் சார்பலனை எந்த ஒரு சார்பலனும் ஒரு பயன்பாட்டுச் சார்பலனாகப் பயன்படும்.

பயன்பாட்டுச் சார்பலன் ஒரு குறிப்பிட்ட காலவரையில் பொருட்களின் (துய்ப்பு) நுகர்ச்சியைப் பற்றியதாக வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது. பண்டங்களின் குறிப்பிட்ட ஒரு சேர்மானத்தில் கிடைக்கும் நிறைவின் அளவுகள், நுகரும் காலத்தின் அளவுக்கு ஏற்றவாறு மாறுபடும். உதாரணமாக, பத்து ஐஸ்கிரீம்களை ஒரு மணி நேரத்தில் சாப்பிடும்போது ஏற்படும் நிறையின் அளவும் ஒருவார காலத்தின் இடைவெளியில் சாப்பிடும்போது ஏற்படும் நிறைவின் அளவும் மாறுபடுகின்றன. இங்கு ஒரு குறிப்பிட்ட கால வரையில், பயன்பாட்டுச் சார்பலன் வரையறுக்கப்பட்டு, இக்கால

வரையில், துய்ப்போரது பெரிதும் உகந்த செலவு அமைப்பு (Optimum expenditure pattern) ஆராயப்படுகிறது.

Q , Q_2 பொருட்களின் பலவிதச் சேர்மானங்களிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட பயன்பாட்டு அளவு அல்லது நிறையைப் பெறமுடியும். $U_0{}^o$ என்ற அளவு பயன்பாட்டுக்கான சார்பலனை,

$$U_0{}^o = f(q_1, q_2) \text{ என்று குறிப்பிடுவோம்.} \qquad (7\cdot2)$$

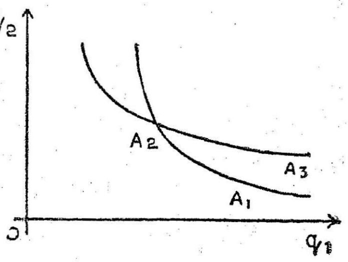
பயன்பாட்டுச் சார்பலன் தொடர்ச்சியானதால், Q_1 Q_2-ன் எண்ணற்ற சேர்மானங்களில் $U_0{}^o$ $f(q_1\ q_2)$ பொருந்துகிறது.

Q_1-ல் 5 அளவும், Q_2-ல் 3 அளவும் வாங்கி $U_0{}^o$ அளவு நிறைவு பெறும் துய்ப்போர், Q_1-ல் 4-ம் Q_2-ல் வாங்கி அதே நிறைவு பெறுவதால் இந்த இருவித சேர்மானங்களினிடையே நிறைவைப் பொறுத்தவரை துய்ப்போருக்கு எந்தவித மாற்றமும் இல்லை. இப்படி ஒரே நிறைவுக் காட்டும் பல சேர்மானங்களின் தொகுப்பே ஒரு சமநோக்கு வளைகோடு என்று முன்பு கண்டோம்.

ஒரு சமநோக்குப் படம் (Indifference Map) என்பது பல சமநோக்கு வளைகோடுகள் கொண்ட ஒரு வரைபடம் சமநோக்கு வளைகோடுகளின் தன்மைகளை, பொதுப் பண்புகளை முன்பு நாம் கவனித்தோம். உதாரணமாக,

A_1 புள்ளிக்கேற்ற பொருள்களின் சேர்மானத்தில் U_1 பயன்பாட்டையும், A_2, B_3 சேர்மானங்களில் முறையே U_2, U_3 பயன்பாடுகளையும் துய்ப்போர் பெறுகின்றார்.

A_1 ஐவிட A_3-ல் பொருள்களின் அளவை அதிகமாகத் துய்ப்பதால் $U_3 > u_1$.



சமநோக்கு வளைகோடுகள்
படம் 25.

A_1-ம் A_2 ஒரு வளைகோட்டில் அமைந்துள்ளதால் $U_1 = U_2$ இதேபோல A_2-ம் A_3-ம் ஒரே வளைகோட்டில் அமைந்ததால் $U_2 = U_3$. எனவே $U_1 = U_2 < U_3$ ஆகிறது. ஆனால் இது பொருந்தாதது; எப்படியென்றால் $U_1 < U_3$ என்று முதலில் கண்டோம். எனவே இவ்விரு (சமநோக்கு) வளைகோடுகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டாது.

இங்கு பயன்பாட்டுக்கும் சமநோக்கு வளைகோட்டிற்கும் உள்ள தொடர்பைக் காண்கிறோம்.

q_1-ஐப் பொறுத்த U-ன் பகுதி வகைக்கெழு f_1 என்றும்

q_2-ஐப் பொறுத்த U-ன் பகுதி வகைக்கெழு f_2 என்றும்

கொண்டால், பயன்பாட்டுச் சார்பலனின் மொத்த வகைக்கெழுவானது

$$dU = f_1\,dq_1 + f_2\,dq_2 \text{ ஆகும்.} \tag{7.3}$$

இங்கு துய்ப்போரது Q_1 பொருள் dq_1 அளவு குறைந்தால் ($dq_1 < 0$ அதனால் ஆகிறது), இதனால் பயன்பாட்டின் நட்டம் (loss). தோராயமாக $f_1\,dq_1$ ஆகும். Q_2 பொருள் dq_2 அளவு கூடினால், பயன்பாட்டின் இலாபம் (gain) தோராயமாக $f_2\,dq_2$ ஆகும். Q_1-ல் குறைத்து Q_2-ல் அதற்கேற்றவாறு கூட்டிப் பொருள் வாங்கும் துய்ப்போர் முன்னைப் போன்ற ஒரே அளவு நிறைவைப் பெறுவதால், இந்த மாற்றத்தால் சமநோக்கு வளைகோட்டின் மீது. பயன்பாட்டின் மொத்த மாறுதல் (change) பூஜ்யமாதலால், மேற்கூறிய இரு உறுப்புக்களின் கூடுதல் எல்லையளவில் (in limit) பூஜ்யம் ஆகும். அதாவது பூஜ்யத்தை அணுகுகிறது.

எனவே $dU = 0$

$$\therefore \quad f_1\,dq_1 + f_2\,dq_2 = 0$$

$$-\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{f_1}{f_2} \tag{7·4}$$

$\frac{dq_2}{dq_1}$ என்பது ஒரு சமநோக்கு வளைகோட்டின் சரிவு. ஒரே அளவு நிறைவைப் பெற Q_2-க்காக Q_1 ஐயோ, அல்லது Q_1-க்காக Q_2 ஐயோ பதிலீடு செய்ய விழையும் வீதமே மேலே கூறிய சரிவாகும்.

இச் சரிவின் எதிர்மறை மதிப்பு, அதாவது $-\frac{dq_2}{dq_1}$ என்பது Q_2-க்காக Q_1 ஐயோ, Q_1-க்காக Q_2 வையோ பதிலீடு செய்யும் பண்டப் பதிலீட்டு வீதம் (Rate of Commodity Substitution. RCS = ப.ப.வீ) எனப்படுகிறது.

இங்கு ப.ப.வீ $= -\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{f_1}{f_2}$

= பயன்பாட்டுச் சார்பலனின் பகுதி வகைக்கெழுக்களின் விகிதம்.

இந்தப் பண்டப் பதிலீட்டு வீதத்தை "பதிலீட்டு விளிம்பு வீதம்" என்றும் கூறலாம். இங்கு இதை பண்டப் பதிலீட்டு வீதம் என்றே அழைப்போம்.

f_1, f_2 என்பனவற்றை முறையே Q_1, Q_2 பண்டங்களுக்கான "விளிம்புப் பயன்பாடு" (Marginal Utility) என்றும் கூறுகிறோம்.

எனவே ப. ப. வீ. = விளிம்புப் பயன்பாடுகளின் விகிதம்.

பயன்பாடு உச்ச நிலையை அடைதல் (Maximisation of Utility)

ஒரு சீரான துய்ப்போர் அதிக அளவு நிறைவைத் தரும் Q_1, Q_2 பண்டங்களின் சேர்மானத்தை வாங்க விரும்புகிறார். தான் ஒரு உச்சப்பாடு அடைய வேண்டுமென்பதே அவரின் குறிக்கோள். தன் வருமானம் வரம்புக்குட்பட்டது; ஆகவே விரும்பும் பொருட்களை எல்லையற்ற அளவுகளில் அவரால் வாங்க இயலாது. துய்ப்போரது வரவு செலவுத் திட்டக் கட்டுப்பாடுகளை (budget constraints)க் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவோம்.

$$y_0 = p_1 q_1 + p_2 q_2 \qquad (7{\cdot}5)$$

இங்கு y_0 = துய்ப்போரின் (நிலையான, மாறுத) வருமானம்

$p_1, p_2 = Q_1, Q_2$ பொருட்களின் விலைகள் (முறையே)

$q_1, q_2 = Q_1, Q_2$ பொருட்களின் அளவுகள்.

தன் வருமானத்தை இந்த இரு பொருட்களுக்காக மட்டுமே செலவிடுகிறார் என்ற அனுமானத்தில்,

$y_0 = p_1 q_1 + p_2 p_2$ ஆகிறது.

இங்கு $U f\ (q_1, q_2)$ என்பது பயன்பாட்டுச் சார்பலன் இப்போது துய்ப்போர் வரவு செலவுத் திட்டக் கட்டுப்பாடுகளுக் கேற்ப [(5)-க்கு ஏற்றவாறு], பயன்பாட்டுச் சார்பலனை [(1 — சார்பலனை] உச்சநிலைப் படுத்துவதற்காக (5)-க்குப் பொருந்தும் பண்டங்களின் சேர்மானத்தை கண்டுபிடிக்க வேண்டும். அச் சேர்மானம் (1) ஐயும் உச்சப்படுத்துவதாக இருத்தல் வேண்டும்

இப்போது வரவு செலவுத் திட்டக் கட்டுப்பாட்டை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$y_0 = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

$$\therefore \quad p_2 q_2 = y_0 - p_1 q_1$$

$$q_2 = \frac{y_0 - p_1 q_1}{p_2}$$ ஆகிறது.

எனவே $U = f(q_1, q_2)$

$$= f\left(q_1, \frac{y_0 - p_1 q_1}{p_2}\right) \qquad (7.6)$$

ஆகவே q_1-ஐப் பொறுத்து மட்டும் (6)-ஐ உச்சநிலைப் படுத்து வோம். இதற்கான நிபந்தனைகள்,

(i) $\frac{dU}{dq_1} = 0$

(ii) $\frac{d_2 U}{aq_1^2} < 0$ என்பதாம்.

இப்போது $\frac{dU}{dq_1} = \frac{df}{dq_1} + \frac{df}{dq_2} \cdot \frac{dq_2}{dq_1}$

$$= f_1 + f_2\left(-\frac{p_1}{p_2}\right)$$

இதை $\frac{dU}{dq_1} = 0$ எனச் சமனிட்டால்

$$f_1 + f_2\left(-\frac{p_1}{p_2}\right) = 0. \qquad (7.7)$$

அதாவது $\frac{p_1}{p_2} = \frac{f_1}{f_2}$.

$$\text{(i.e.)} \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_{}} \qquad (7.8)$$

எனவே விளிம்புப் பயன்பாடுகளின் விகிதம் விலைகளின் விகிதத்துக்குச் சமமாக இருக்கும்போது U-ன் மதிப்பு உச்ச அளவை எட்டும்.

மேலும் $\frac{f_1}{f_2}$ = ப. ப. வீ. என்பதால்

பண்டப் பதிலீட்டு வீதமும் விலைகளின் வீதமும் சமமாகிறது. மேலும் (8) சமன்பாட்டை இப்படியும் எழுதலாம்,

$$\frac{f_1}{p_1} = \frac{f_2}{p_2} \tag{7·9}$$

அதாவது எல்லாப் பண்டங்களுக்கும், $\frac{\text{விளிம்பு பயன்பாடு}}{\text{அதன் விலை}}$ என்ற விகிதம் சமமாக உள்ளது.

இப்போது $\frac{d^2U}{dq_1{}^2} \infty < 0$ என்பது இரண்டாம் நிபந்தனை.

$$\frac{d^2U}{dq_1{}^2} = \frac{d}{dq_1}\left[f_1 + f_2\left(-\frac{p_1}{p_2}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{d(f_1)}{dq_1} + \frac{d(f_1)}{dq_2}\cdot\frac{dq_2}{dq_1} + \frac{df_2}{dq_1}\left(-\frac{p_1}{p_2}\right) + \frac{d(f_2)}{dq_2}\left(-\frac{p_1}{p_2}\right)\cdot\frac{dp_2}{dq_1}\right]$$

$$= f_{11} + f_{12}\cdot\left(-\frac{p_1}{p_2}\right) + f_{21}\cdot\left(-\frac{p_1}{p_2}\right) + f_{22}\left(-\frac{p_1}{p_2}\right)^2$$

$$= f_{11} + 2f_{12}\left(-\frac{p_1}{p_2}\right) + f_{22}\left(-\frac{p_1}{p_2}\right)^2 < 0$$

ஆகும்.

(இங்கு $f_{12} = f_{21}$ ஏனெனில் f_1, f_2 தொடர்ச்சியான சார்பலன்கள்).

அதாவது $f_{11}\,p_2{}^2 - 2f_{12}\,p_1\,p_2 + f_{22}\,p_1{}^2 < 0$ (7·10)

(8), (9), (10) மூன்றும் சரியாக இருந்தால் பயன்பாட்டுச் சார்பலன் ஓர் உச்ச நிலையை அடைகிறது.

(4) சமன்பாட்டின் மூலம்

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{f_1}{f_2} \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2 q_2}{dq_1^2} = \frac{d}{dq_1}\left(-\frac{f_1}{f_2}\right)$$

$$= \frac{f_2\left(\frac{df_2}{dq_1}\right) - f_1\left(\frac{df_2}{dq_1}\right)}{f_2^2}$$

$$= \frac{f_2\left[f_{11} + f_{12}\cdot\frac{dq_2}{dq_1}\right] - f_1\left[f_{21} + f_{22}\cdot\frac{dq_2}{dq_1}\right]}{f_2^2}$$

எனவே $\frac{d^2 q_2}{dq_1^2} =$

$$= -\frac{f_2\left[f_{11} + f_{12}\left(-\frac{f_1}{f_2}\right)\right] - f_1\left[f_{21} + f_{22}\left(-\frac{f_1}{f_2}\right)\right]}{f_2^2}$$

$$= -\frac{f_{11}f_2 - f_1 f_{12} - f_1 f_{21} + f_{22}\frac{f_1^2}{f_2}}{f_2^2}$$

$$= -\frac{[f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1 f_2 + f_{22}f_1^2]}{f_2^3} \qquad (7\cdot 11)$$

இங்கு $f_{12} = f_{21}$)

இங்கு $f_1 = \frac{p_1 f_2}{p_2}$ என்ற மதிப்பில்

$$\frac{d^2 q_2}{dq_1^2} = -\frac{1}{f_2 p_2^2}[f_{11}p_1^2 - 2f_{12}p_1 p_2 + f_{22}p_2^2] \quad (12)$$

ஆகின்றது.

எனவே (10) லிருந்து $f_{11}p_1^2 - 2f_{12}p_1 p_2 + f_{22}p_2^2 < 0$ என்று நாம் அறிவோம்.

எனவே $\frac{d^2q_2}{dq_1^2} > 0$

ஆதலால் சமநோக்கு வளைகோடுகள் ஆதியிலிருந்து குவிந்து காணப்படுகின்றன.

மாதிரி : $U = q_1 q_2$ என்பது ஒரு பயன்பாட்டுச் சார்பலன் எனவும் $p_1 = 2$ ரூபாய்கள், $p_2 = 5$ ரூபாய்கள், $y_0 =$ நுகர்வோர் வருமானம் $= 100$ ரூபாய்கள், வரவு செலவுத் திட்டக் கட்டுப்பாடு: $100 - 2q_1 - 5q_2 = 0$ என்பதாகும்.

$$5q_2 = 100 - 2q_1$$

$$q_2 = 20 - \frac{2q_1}{5}$$

$$\therefore \quad U = q_1 q_2 = q_1\left(20 - \frac{2q_1}{5}\right)$$

$$= 20q_1 - \frac{2q_1^2}{5}$$

$$\frac{dU}{dq_1} = 20 - \frac{4q_1}{5}$$

இப்போது $\frac{dU}{dq_1} = 0$ என்றால் $20 - \frac{4q_1}{5} = 0$

$$\frac{4q_1}{5} = 20. \qquad 4q_1 = 100. \qquad \underline{\underline{q_1 = 25.}}$$

எனவே வரவு செலவுக் கட்டுப்பாட்டில் $q_1 = 25$

எனச் சமனிட்டால் $q_2 = 20 - \frac{2q_1}{5}$

$$= 20 - \frac{50}{5} = \underline{\underline{10.}}$$

மேலும் $\frac{d^2U}{dq_1^2} = -\frac{4}{5} < 0.$

எனவே பயன்பாடு ஒரு உச்ச மதிப்பை $q_1 = 25$ எனும் போது பெறுகிறது.

$$U = q_1 q_2 = \left[20q_1 - \frac{2q_1^2}{5} \right]_{q_1 = 25}$$

$$= 20 \times 25 - \frac{2 \times 625}{5} \quad (125)$$

$$= 500 - 250$$

$$= 250$$

எனவே Q_1 பொருளின் அளவு $q_1 = 25$

Q_2 பொருளின் அளவு $q_2 = 10$ என்று

வாங்கும்போது மிக அதிகமான பயன்பாட்டை (நிறைவை)ப் பெறுகின்றுன்.

அந்த உச்ச அளவு (நிறைவு) பயன்பாடு $= 25 \times 10 = \underline{250}$ ஆகிறது.

(ii) $U = q_1 q_2$

$$100 - 2q_1 - 5q_2 = 0$$

$$\therefore \quad 2q_1 = 100 - 5q_2$$

$$q_1 = 50 - \frac{5q_2}{2}$$

எனவே $U = 50q_2 - \dfrac{5q_2^2}{2}$

ஆகவே $\dfrac{dU}{dq_2} = 50 - \dfrac{10q_2}{2}$

$$= 50\ 5q_2.$$

இப்போது $\dfrac{dU}{dq_2} = 0$ என்ருல் $5q_2 = 50$; $q_2 = \underline{10}$

ஆகவே $q_1 - 50 - \dfrac{5q_2}{2} = 50 - \dfrac{50}{2} = \underline{25.}$

இங்கும் அதே மதிப்புகள் தான் கிடைக்கின்றன.

(iii) மேலும் $f_1 = \dfrac{\partial U}{\partial q_1} = \dfrac{\partial}{\partial q_1}(q_1\, q_2) = q_2 = 10.$

$$f_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = \frac{\partial}{\partial q_2}(q_1\, q_2) = q_1 = 25.$$

ஆதலால் $\dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{q_2}{q_1} = \dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5}$

இங்கு $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{2}{5}$ ஆகிறது.

எனவே $\dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$ என்று புலனாகிறது.

(iv) $q_2 = 20 - \dfrac{2q_1}{5}$

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{2}{5} = -\frac{f_1}{f_2} = -\frac{q_1}{q_2}.$$

$\therefore\ -\dfrac{dq_2}{dq_1} = \dfrac{2}{5} = \dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$ என்றும் அறிகிறோம்.

$$\frac{d^2q_2}{dq_1{}^2} = \frac{d}{dq_1}\left[-\frac{2}{5}\right] = \frac{d}{dq_1}\left[-\frac{q_1}{b_1}\right]$$

$$= \frac{q_2}{q_1{}^2} > 0.$$

(ஏனெனில்) q_1, q_2 நேர்மதிப்புடையவை)

எனவே சமநோக்கு வளைகோடுகள் கீழிருந்து (அடியிலிருந்து) குவிந்த வளைகோடுகளாகும்.

மாதிரி :

$U = -2x^2 + 5xy - y^2$ என்ற பயன்பாட்டுச் சார்பலன் என்றும்,

$x + 3y = 8$ என்ற வரவு செலவுத் திட்டக் கட்டுப்பாடு என்றும் கொண்டால்,

பயன்பாடு உச்சநிலை ஆவதற்கான x, y மதிப்புகளை நிர்ணயிக்கவும்.

$$U = -2x^2 + 5xy - y^2$$

$x + 3y = 8$ என்றால், $x = 8 - 3y$.

$$\therefore \quad U = -2(8-3y)^2 + 5(8-3y)y - y^2$$
$$= -2[64 + 9y^2 - 48y] + 5(8y-3y^2) - y^2$$
$$= -128 - 18y^2 + 96y + 40y - 15y^2 - y^2$$
$$= -128 + 136y - 34y^2.$$

$$\frac{dU}{dy} = 136 - 68y$$

$$\frac{d^2U}{dy^2} = 68 < 0$$

$\frac{dU}{dy} = 0$ என்றால் $68y = 136$

$$y = 2.$$

எனவே $x = 8 - 3y = 8 - 6 = 2.$

$\therefore \quad x = 2, \quad y = 2$ என்ற மதிப்பில் பயன்பாட்டுச் சார்பலன் ஒரு உச்ச மதிப்பை அடைகிறது. அந்த உச்ச அளவு

$$= [-2x^2 + 5xy - y^2]\, x = 2,\ y = 2$$
$$= [-2(4) + 5(2)(2) - (4)]$$
$$= -8 + 20 - 4 = 8.$$

மாதிரி :

பயன் பாட்டுச் சார்பலன்

$$U = 108 - [(x-6)^2 + 2(y-6)^2]$$

வரவு செலவுத் திட்டக் கட்டுப்பாடு $3x + 4y = 25$ என்றால், பயன்பாட்டை உச்ச அளவாக்கும் x, y களின் மதிப்பை நிர்ணயிக்கவும்.

$$U = 108 - [(x-6)^2 + 2(y-6)^2]$$
$$3x + 4y = 25$$
$$3 + 4\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{dU}{dx} = -2(x-6) - 2(2)(y-6).\frac{dy}{dx}$$

$$= -2(x-6) - 4(y-6)\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$= -2x + 12 + 3y - 18$$

$$= -2x + 3y - 6.$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -2 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$= -2 + 3\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$= -2 - \frac{9}{4} = -\frac{17}{4} < 0$$

x, y-களின் மதிப்பைக் கணிக்க

$$-2x + 3y - 6 = 0$$

$3x + 4y = 25$ என்ற இரு சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்,

$$-2x + 3y = 6 \quad (1)$$

$$3x + 4y = 25 \quad (2)$$

(1) × 3 ; $\quad -6x + 9y = 18 \quad (3)$

(2) × 2 ; $\quad 6x + 8y = 50 \quad (4)$

(3) + (4) ; $\quad 17y = 68$

$$\underline{y = 4}$$

$$3x = 25 - 45 = 25 - 16 = 9$$

$$\underline{x = 3}$$

எனவே உச்சகட்ட பயன்பாட்டிற்கான $x = 3$, $y = 4$ ஆகும். பயன்பாட்டின் உச்ச அளவு $= 108 - [(x-6)^2 + 2(y-6)]^2$

$$= 108 - [9 + 2(4)]$$

$$= 108 - 17 = 91.$$

பயிற்சிகள்

1. a, b என்பன நேர்நிலை எண்களானால்,

$$U = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

என்ற பயன்பாட்டுச் சார்பலன் $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ என்ற x, y பண்டங்களின் இயல்பான வடிவுடைய ஒரு சமநோக்குப் படத்தை (Indifference map)த் தருகிறது என்று நிரூபித்துக் காட்டுக. சமநோக்கு வளைகோடுகள் ஒரு மைய வட்டங்களின் வில்கள் (Arcs of concentric circles) என்றும் நிரூபிக்கவும்.

2. $U = \dfrac{x + a}{c - \sqrt{y + b}}$ என்ற பயன்பாட்டுச் சார்பலனை ஆராய்க. இங்கு a, b, c என்பன நேர்நிலை எண்கள். சமநோக்குப் படம் பரவளைவுகளின் ஒரு தொகுப்பு என்றும் x, y-களின் சில குறிப்பிட்ட எல்லைகளில் இவ் வளைகோடுகள் இயல்பான வடிவத்தில் இருப்பதாக காட்டவும்.

3. ஒரு சமநோக்குப் படம் கீழே கண்டவாறு வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது.

$$(x + h) \sqrt{(y + k)} = a$$

இங்கு h, k என்பன நேர்நிலை எண்கள். a என்பது ஒரு நேர் மதிப்புள்ள பண்பளவு (positive parameter) y மாறியை x மாறியின் சார்பலனாக எழுதி, அதன் வகைக்கெழுக்களைக் கண்டுபிடிக்கவும். அதன்மூலம் சமநோக்கு வளைகோடு கீழ்நோக்கிச் சரிந்தும், கீழிருந்து குவிந்தும் உள்ள வளைகோடு என்றும் நிரூபிக்கவும்.

[சென்னை ஏப்ரல் 1970]

4. பயன்பாட்டுச் சார்பலன் $U\ 4xy - y^2$ வரவு செலவுக் கட்டுப்பாடு $2x + y = 6$ என்றால், பயன்பாடு மிக உயர்ந்த அளவு இருப்பதற்கான x, y மதிப்புகள் யாவை? படம் வரைந்தும் விளக்குக.

5. பயன்பாட்டுச் சார்பலன் $U = 27 + 6xy - 2x^3 - y^2$ வரவு செலவுச் சமன்பாடு $x + y = 9$ என்றால் U-ஐ உச்சமாக்கும் x, y-ன் மதிப்புகளைக் கணிக்கவும்.

6. பயன்பாட்டுச் சார்பலன் $U = 24x + 32y - x^1 - y^2$ வரவு செலவுச் சமன்பாடு $x + 2y = 9$ என்றால், U-ஐ உச்ச

மாக்குகிற x, y மதிப்புகள் யாவை? சமநோக்கு படம் வரைந்து, கண்டறிந்த மதிப்புகளைச் சரிபார்க்கவும்.

7. பயன்பாட்டுச் சார்பலன்

$$U = 29 - 2(x - 2)^2 - 2(x - 2)(y - 3) - (y - 3)^2$$

வரவு செலவுச் சமன்பாடு

$$3x + 2y = 7 \text{ என்றால்}$$

U மதிப்பு உச்சமாக்கப்படுவதற்கான x, y மதிப்புகளைக் கண்டறிந்து அவற்றின்மூலம் U-ன் உச்ச மதிப்பையும் கணக்கிடவும்.

8. x, y-க்கான பயன்பாட்டுச் சார்பலன்

$$U = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} \text{ என்றும்}$$

வரவு செலவுத் திட்டக் கட்டுப்பாடு $x + y = 6$ என்றும் தரப்பட்டால், U-ன் உச்ச மதிப்புக்கான x, y மதிப்புகளைக் கணிக்கவும்.

9. வரவு செலவுச் சமன்பாடு $2x + y = 7$-க்குக் கட்டுப்பட்ட பயன்பாட்டுச் சார்பலன் u

$$U = (x + 2)^{\frac{2}{3}} (y + 1)^{\frac{1}{3}} \text{ என்றால்,}$$

u-ன் உச்ச மதிப்புக்கான x, y மதிப்புகளைக் கண்டறியவும்.

$Z = U^3$ என்றால், Z_{Max} (உச்ச மதிப்பு)க்கும் வரவு செலவுச் சமன்பாட்டுக்கும் ஒத்த சமநோக்கு வளைகோட்டைப் படம் வரைந்து காட்டுக.

9. உற்பத்தி இயல்

(Production)

உற்பத்தியின் மூல காரணமாவது, மனித இனத்தின் அடிப் படைத் தேவைகளைப் பூர்த்தி செய்வதே ஆகும். நடைமுறையில், உற்பத்தி செய்யப்பட்டு வெளிவரும் பொருட்களையே 'உற்பத்தி' என்று குறிப்பிடுகிறோம். ஆனால் பொருளாதாரக் கோட் பாட்டின்படி (Economic theory), உற்பத்தியின் இயல்பானது இத்தகையதொரு குறுகிய வரையறைக்குள் உட்படுத்தப் படுவதில்லை. தேவைகளைப் பூர்த்தி செய்வதற்காக எடுக்கப்படும் எந்த முயற்சியுமே உற்பத்தித் திறனுடையதாகக் கருதப்படும். உதாரணமாக, ஆசிரியர், மருத்துவர், வழக்கறிஞர் ஆகியோ ருடைய சேவைக்காக ஊதியமளிக்க மக்கள் முன் வருகின்றனர். இவர்களது பணிகள் (services) மக்களது தேவைகளை ஏதேனும் ஒரு வகையில் பூர்த்தி செய்வதனால், நாட்டின் மொத்த உற்பத்தி அளவு பெருக வாய்ப்பு ஏற்படுகிறது. எனவே இத்தகைய பல்வேறு பணிகளும் உற்பத்தித் திறன் வாய்ந்தனவாகக் கருதப் படுகின்றன. நேரடியாக உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருட்களைத் (goods) தவிர. இத்தகைய பல்வேறு பணிகளும் உற்பத்தி இயலில் இடம் பெறுகின்றன. நுகர்வுப் பொருட்களின் பயனை (utility) உண்டாக்குவதையே நாம் 'உற்பத்தி' என்று குறிப்பிடுகிறோம். நுகர்ச்சி (cansumption) ஆனது, ஒரு பொருளின் பயனை அழிப் பதாகக் கருதப்படுகிறது. எனவே, உற்பத்தியானது நுகர்வின் அடிப்படையில் நிகழும் வினை எனத் தெளிவாகிறது. இப் பகுதியில் நாம் விரிவாகக் கருதுவது உற்பத்தி செய்யப்படும் நுகர்ச்சிப் பொருட்களைப் பற்றியே ஆகும்.

ஒரு நிறுவனமானது (firm), சில குறிப்பிட்ட தொழில் நுணுக் கங்களைப் பயன்படுத்திப் பொருட்களை உற்பத்தி செய்து வெளிப் படுத்துகின்றது. தொழில் முயல்வோனானவன் (organiser) உற்பத்தி செய்யப்படும் ஒரு பொருளின்—அல்லது பல பொருட்

களின்—மொத்த உற்பத்தி அளவினையும், உற்பத்திச் செயல் முறையினையும் முன் கூட்டியே தீர்மானித்துக் கொள்கிருன். அதன் மூலமாக ஏற்படும் இலாபத்தை (profit) அல்லது இழப்பை (loss) ஏற்றுக் கொள்கிருன். அவனது உற்பத்திச் சார்பில் குறிக்கப்பட்ட தொழில் நுணுக்க விதிகளைப் பின்பற்றி, முதற் பொருட்களை (inputs) முழுமையான ஆக்கப் பொருட்களாக (output) உரு மாற்றம் செய்கிருன். இவ்வாறு உற்பத்தி செய்யப்படும் ஆக்கப் பொருட்களை விற்பதன் மூலமாகக் கிடைக்கும் மொத்த வருவாயி லிருந்து உற்பத்திச் செலவினைக் கழிக்க, இரண்டுக்குமுள்ள வேறு பாடானது நேர்க் கணியமாக (+) அமைந்திருந்தால், கிடைப்பது இலாபமாகவும், எதிர்க் கணியமாக (—) இருந்தால் கிடைப்பது இழப்பாகவும் அமையும்.

தொழில் முயல்வோனின் உற்பத்திச் சார்பானது அவன் பயன் படுத்தும் பல்வேறு மூலப் பொருட்களின் அளவிற்கும், உற்பத்தி செய்யப்படும் ஆக்கப் பொருளின் அளவிற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பினைக் கணித வடிவில் வெளிப்படுத்தும் தன்மைத்தாகும். இந்தக் கருத்து மிகப் பொதுவான தொன்ருகும். ஒரு குறிப்பிட்ட உற்பத்திச் சார்பானது, ஒரு தனிப்பட்ட புள்ளியாகவோ, தொடர்ச்சியான அல்லது தொடர்பற்றதொரு சார்பாகவோ, அல்லது ஒரு சமன்பாட்டுத் தொகுப்பாகவோ கொடுக்கப்படலாம். குறிப்பாக, இரு முதற்பொருட்களைப் பயன்படுத்தி உற்பத்தி செய்யப்படும் ஆக்கப் பொருளின் தன்மையைக் கருதுவது ஆய்வுக்கு எளிதாகிறது.

முதல்நிலைப் பொருளானது (input) ஒரு ஆக்கப் பொருளினை உற்பத்தி செய்வதற்குப் பயன்படுத்தப்படும் பொருள் அல்லது பணி யினைக் குறிக்கும். தொழில் முயல்வோனுனவன், ஆக்கப் பொருளை உற்பத்தி செய்தற் பொருட்டு, பல்வேறு முதல் நிலைப் பொருட்களைப் பயன்படுத்துகிருன். ஒரு சில முதல்நிலைப் பொருட்கள் மற்ற நிறுவனங்களின் உற்பத்திப் பொருட்களாகவும் அமைவதைக் காணலாம். உதாரணமாக, எஃகு போன்ற மூலப் பொருட்கள் ஏற்கெனவே உற்பத்தி செய்யப்பட்டுப் பின்பு பயன்படுத்தப்படு கின்றன. நிலம், உழைப்பு, தாதுப் பொருட்கள் போன்ற வகையான முதல்நிலைப் பொருட்கள் ஏற்கெனவே உற்பத்தி செய்யப்படுவன அல்ல. கொடுக்கப்படும் உற்பத்திக் கால அளவில், முதல்நிலைப் பொருட்களை மாறும் தன்மை உடையனவாகவும், மாருதனவாகவும் இரு வகையாகப் பிரிக்கலாம். மாருத (நிலையான) தன்மையுடைய முதல்நிலைப் பொருளானது, உற்பத்திக்கு மிகவும் இன்றியமையாத தாகும். அதனுடைய அளவானது, உற்பத்தியின் அளவு

எத்தகையதாய் இருப்பினும் மாருத தன்மை உடையதாய் அமைய வேண்டும். மாறும் தன்மையுடைய (variable) முதல் நிலைப் பொருட்களின் தேவைப்படும் அளவானது மொத்த உற்பத்தி அளவினைச் சார்ந்ததாகும். கால அளவினைப் பொறுத்து, முதல்நிலைப் பொருட்கள் மாறும் தன்மையனவாகும். ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் மாருமல் இருக்கும் முதற் பொருட்கள், நீண்ட கால அளவில் மாறும் தன்மை உடையனவாகும்.

வரையறை (difinition)

கொடுக்கப்பட்ட தொழில் நுணுக்க நிபந்தனைகளின்படி, உற்பத்தியாகும் X என்ற பொருளின் மொத்த உற்பத்தி அளவானது பல்வேறு உற்பத்தித் திறன்கள் அமைந்த காரணிகள் பயன்படுத்தப்படும் அளவுகளை மட்டும் சார்ந்திருக்கும். இக் காரணிகள், வரையறுக்கப்படும் சார்பில் மாறிகளாகும். காரணிகள் $A_1, A_2, \ldots A_n$ எனவும், அவை பயன்படுத்தப்படும் அளவுகள் $a_1, a_2 \ldots a_n$ என்றும் கொண்டால், உற்பத்தி அளவு x என்பது பின்வரும் உற்பத்திச் சார்பின் மூலமாகக் கொடுக்கப்படும்.

$$x = f(a_1, a_2 \ldots a_n)$$

இது n காரணிகள் சார்ந்த உற்பத்திச் சார்பு.

மேற்கண்ட வரையறையில், எடுகோளானது (assumption) பின்வருமாறு அமைகிறது.

உற்பத்திக் காரணிகள் அனைத்தும் தொடர்ச்சியாக வகுபடும் தன்மையுடையனவாக உள்ளன எனவும், உற்பத்திச் செயல் முறையானது தொடர்ந்து மாறக் கூடிய தன்மை வாய்ந்ததெனவும் கொள்கிறேம். எனவே உற்பத்திச் சார்பானது தொடர்மாறிகளில் (continuous variables) அமைந்த ஒரு தொடர் சார்பாகும். சில காரணிகளை மாருத் தன்மை வாய்ந்தனவாக வைத்துக்கொள்வதும் சில சமயங்களில் சாத்தியமாகிறது.எத்தனை காரணிகளை மாற்றுமல் வைத்துக் கொள்ளினும், எத்தனைக் காரணிகளை மாறுவதாகக் கருதினும், ஒரு முடிவான உற்பத்திச் சார்பினை நம்மால் கருத இயலுகிறது.

இரு உற்பத்திக் காரணிகளை (முதற் பொருட்களை) கருதுவது பகுப்பாய்வுக்கு எளிதாகிறது. இரு உற்பத்திக் காரணிகள் A & B ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி, X எனும் ஆக்கப் பொருளை உற்பத்தி செய்யும் ஒரு தொழில் நிறுவனத்தினைக் கருதுவோம் காரணி

களின் அளவுகள் a & b என்று இருக்கட்டும். உற்பத்திப் பொருள் அளவு x ஆனது

$$x = f(a, b)$$

என்ற உற்பத்திச் சார்பின் மூலம் குறிக்கப்படும். இச் சார்பானது, ஒற்றை மதிப்புடைய தொடர்ச்சியான, (single valued & continuous function). சார்பாகக் கொள்ளப்படுகிறது, இச் சார்பானது, உற்பத்திக் காரணிகளும், உற்பத்தி அளவும் (a, b & x) எடுக்கும் நேர்க் கணிய (+) மதிப்புகட்கு மட்டுமே வரையறுக்கப்படும். எதிர்க் கணிய (—) மதிப்புகளுக்கு இங்கு எவ்விதப் பொருளும் அமைவதில்லை. கருதப்பட்ட a, b காரணிகளைத் தவிர மற்றவற்றை ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையான அளவுகளில் மட்டும் பயன்படுத்துவதாகக் கொள்கிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு உற்பத்தி அளவினை அடைய, தொழில் முயல்வோனானவன் A, B காரணிகளைப் பல்வேறு விகிதங்களில் கலந்து பயன்படுத்த இயலுகிறது. இக் காரணிகளின் தொகுதிகள் (canbinations) ஒரு வரையரைக்கு உட்பட்டன அல்ல. தொழில் நுட்பத் திறனானது முன் கூட்டியே நிர்ணயிக்கப் படுவதால், இந்த உற்பத்திச் சார்பானது ஒவ்வொரு முதற் பொருட் தொகுதியினின்றும் பெறக் கூடிய உச்ச அளவு (maximum) உற்பத்தியைக் குறிக்கும். மிகச் சிறந்த (optimum) காரணித் தொகுதியை தெரிவு செய்வதானது, முதற் பொருட்களின் விலைகளையும், உற்பத்தி பொருட்களின் விலையினையும் பொறுத்ததாகும். அது பொருளாதார ஆய்வுப் பிரச்சினையாக உருவெடுக்கிறது.

குறுகிய கால (shart run) அளவினை சார்ந்த முதற் பொருள் அளவுகள், உற்பத்தி அளவு, மற்றும் உற்பத்திச் சார்பு ஆகியவை பின்வரும் நிபந்தனைகட்கு உட்பட்டதாகும்.

இச் சிறு கால அளவில், முதற்பொருட்களின் நிலையான அளவானது மாற்றப்படாதிருக்கவேண்டும். உற்பத்திச் சார்பின் வடிவமானது, தொழில் நுட்ப வளர்ச்சி காரணமாக மாருதிருக்க வேண்டும். மேலும், இக்கால அளவானது தேவையான தொழில் நுட்பச் செயல்முறைகளை முழுமையாகப் பயன்படுத்தத் தக்க அளவிற்கு நீண்ட தொன்ருய் அமையவேண்டும். மாருது நிலையாகக் கருதப்பட்ட முதற்பொருட்களின் அளவுகளில் மாற்றம் ஏற்படத்தக்க அளவுக்கு கால வரையறையினை நீட்டுவதன்மூலம், நீண்ட கால அளவிற்கு (long run) ஏற்ற உற்பத்திச் சார்பு வரையறுக்கப்படுகிறது.

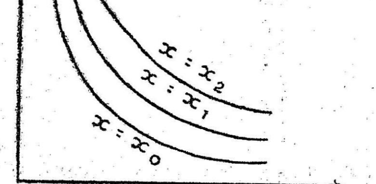
இனி, விரிவாக, உற்பத்தி இயலின் பல்வேறு கூறுகளை ஆய்கிறோம்.

சம உற்பத்தி (ஆக்க) அளவு வளைவுகள் (Constant product curves or isoquants)

சுருக்கமாக சம ஆக்க அளவு வளைவு என்று இதனைக் குறிப்பிடலாம். நுகர்வோரது சமபயன் வளைகோட்டினுக்கு (indifference curve) ஒப்ப, உற்பத்தியாளரது சம ஆக்க அளவு வளைவு வரையறுக்கப்படும். இது, ஒரு குறிப்பிட்ட உற்பத்தி அளவினைத் தரக் கூடிய முதற்பொருள் அளவுகளின் தொகுப்பின் நியமப் பாதை (locus) ஆகும். இவ்வாறு ஒரே உற்பத்தி அளவினை அளிக்கும் முதற்பொருட்களின் பல்வேறு தொகுதிகளை (a, b) என்ற சம பரப்பில் (plane) புள்ளிகள்மூலம் குறித்து, அப் புள்ளிகளை ஒழுங்கான வளைவுகள்மூலம் இணைக்கையில் கிடைப்பது 'சம ஆக்க அளவு வளைவு' எனப்படும். உதாரணமாக, x_0 என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட உற்பத்தி மதிப்புக்கு இணையாக,

$$b(a, b) = x_0$$

என்ற சம உற்பத்தி வளைவு பெறப்படும். இங்கு x_0 என்பது இச் சார்பின் மாறிலி (parameter) ஆகும். (a, b) காரணி அளவுகளின் பல்வேறு தொகுதிகள் மேற்கண்ட சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்கையில், அவற்றின் நியமப் பாதையானது சம ஆக்க வளைவாகிறது. உற்பத்திச் சார்பு தொடர்ச்சியானதாகக் கருதப்படுவதால், ஒவ்வொரு சம ஆக்க வளை கோட்டிலும் எண்ணற்ற முதற் பொருள் அளவுகளின் தொகுப்புக்கள் (cambination) அமைந்திருப்பதைக் காணலாம். இத்தகைய மூன்று வளைவுகளைப் பின்வரும் விளக்கப் படத்தில் காணலாம்.

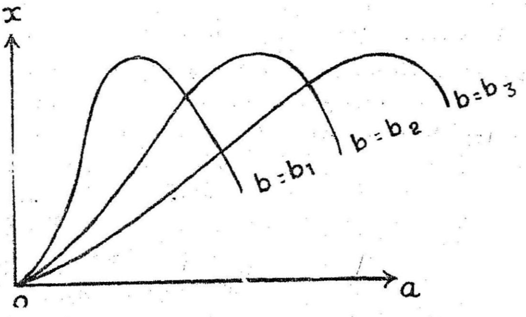


படம் 26.

ஒரு சம ஆக்க அளவு வளைவில் அமையும் முதற் பொருட் தொகுதிகளின் பல்வேறு மதிப்புகளும் அவ்வளைவினில் அமையும் அளவினையே தரக்கூடியன எனக் காண்கிறோம். இரு காரணிகளைக் கருதுகையில், a, b ஆகிய காரணி அளவுகளையும் ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லைக்குள் அதிகப் படுத்தும்பொழுது உற்பத்தி ஆக்க அளவும் அதிகரிக்கக் காணலாம் ஆரம்பப் புள்ளியினின்றும். (origin) ஒரு சம ஆக்க அளவு வளைவானது எவ்வளவுக்

கெவ்வளவு அதிக தொலேவில் அமைகிறதோ, அவ்வளவுக் கவ்வளவு அது குறிப்பிடும் உற்பத்தி ஆக்க அளவும் அதிக மாக இருக்கும். உதாரணமாக, மேற்கண்ட வரைபடத்தில் $x_2 > x_1 > x_0$ என்று அமைந்திருக்கிறது. காரணிகள் அளவு விகிதம் மாறுகையில், (a, b) என்னும் புள்ளியும் அதற்கேற்ப நகர் வதால், உற்பத்தி மாற்றத்தினே இது குறிக்கும்.

காரணிகளின் உற்பத்தித்திறன்களேப் பின் வருமாறு கருதலாம். B என்ற காரணி பயன்படுத்தப்படும் அளவினே 'b_1' என்ற நிலேயான மதிப்பாகக் கொள்க. இந்நிலேயில் A காரணியை மாறுபட்ட அளவுகளில் பயன்படுத்துகையில் கிடைக்கும் பொருளின் உற்பத்தி அளவானது, A உற்பத்திக் காரணியின் மொத்த உற்பத்தித் திறன் எனக் கூறப்படும். அப்பொழுது $x = f(a, b_1)$ என்ற சார்பு அமைகிறது. இது 'a' மாறியினே மட்டும் சார்ந்தது ($\therefore b_1$ மாறிலியாகும்). b_1-ன் மதிப்பை மாற்று வதன் மூலம், இத் தொடர்பும் மாறும் தன்மையதாகும். சில நிலேயான மதிப்புகளே ($b_1, b_2, \ldots$ என) b-க்கு கருதுவதன் மூலம் உற்பத்திப் பரப்பில், (a, x) என்ற அச்சுக்களில், செங்குத்தான பிரிவுகள் பின்வரும் படத்தில் கண்டதுபோல் அமைந்திருக்கும்.



படம் 27.

b-ன் நிலேயான அளவு b_1 அதிகரிக்கப்படுகையில், அனுமதிக் கப்பட்ட எல்லேக்குள் உற்பத்தி செய்யக் கூடிய அளவினேத் தருதற்குப் பயன்படுத்தும் A-ன் அளவானது குறைந்துவிடுகிறது. ஒரு மொத்த உற்பத்தித் திறன் வளேவானது இன்னென்றின் இடமாக (left) அமைந்திருப்பின் அதைச் சார்ந்த b_1 அளவானது மிகுதியாய் இருக்கும். மிக எளிய இயல் நிலேயில் (simple normal case), செங்குத்தான பரப்பானது, a அதிகரிக்கையில் உயர்ந்து செல்லும் தன்மையதாக அமையும். பொதுவான இயல் நிலேயில்

(more general normal case) உற்பத்தி a அதிகரிப்புக்கு ஏற்ப அதிகமாக வளர்ந்து, a-ன் ஒரு மதிப்பில் உச்சநிலை அடைந்து, அதன் பின் குறையத் துவங்கும், b_1 மதிப்பு அதிகரிக்கப்பட்டால், a-ன் மதிப்பும் அதிகரிக்கப்படல் வேண்டும். அப்போதுதான் உச்சநிலை உற்பத்தியும் அதிகமாக அமையும். ஒரு குறிப்பிட்ட காரணித் தொகுப்பில் உச்சநிலை உற்பத்தி அமைந்திருப்பதை எந்த நிலையிலும் காணலாம்.

பொதுவான இயல் நிலைக்குப் பொருந்தும் ஒரு உற்பத்திச் சார்பு

$$x = A \cdot a^{\alpha} \cdot b^{1-\alpha} \text{ ஆகும்.}$$

(α என்பது நேர்க்கணிய (+) பின்னமாகும்). இது காப்-டக்ளஸ் (Coble-Douglus) உற்பத்திச் சார்பு எனப்படும். இச் சார்பினுக்கு ஏற்ற சம ஆக்க அளவு வளைவானது, $x = x_1$ என்று பிரதியிட,

$$x_1 = A \cdot a^{\alpha} \cdot b^{1-\alpha}$$

என்று ஆகும். இதிலிருந்து,

$$\frac{x_1}{A} = a^{\alpha} \cdot b^{1-\alpha} \text{ எனவும்,}$$

$$\text{அதாவது } b = \left(\frac{x_1}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \Big/ a^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

என்றும் பெறுகிறோம்.

இதிலிருந்து,

$$\frac{db}{da} = -\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \cdot \left(\frac{x_1}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \Big/ a^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}$$

$$< 0$$

என்பதும்,

$$\frac{d^2 b}{da^2} = \frac{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}+1\right)}{a^{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}+2\right)}} \left(\frac{x_1}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$> 0$$

என்பதும் பெறப்படும்.

அதாவது, இங்கு அமையும் சம ஆக்க அளவு வளைவுகள் அனைத்தும் கீழ் நோக்கிச் சரிந்தும் (downward sloping) ஆரம்பப் புள்ளிக்குக் குவிவாகவும் (convex to origin) அமைந்திருக்கும். எல்லாப் புள்ளிகளிலுமே இந்நிலை காணப்படும். குறிப்பாக, $\alpha = \frac{1}{2}$ என்ற மதிப்பிற்கு, இவ்வளைவுகள் அனைத்தும் செவ்வக அதிபர வளைவுகளாக (rectangular hyperbola), O_a, O_b என்ற தொலை தொடுகோடுகளுடன் (asymptotes) அமைந்திருக்கும்.

$x = Aa^{\alpha} . b^{1-\alpha}$ என்ற சமன்பாட்டின் மடக்கையினைக் கருத

$$\log x = \log A + \alpha \log a + (1 - \alpha) \log b$$

என்று பெறுகிறோம். உற்பத்தியின் பரப்பானது இருமடித் தளமாகவும் (plane), சம ஆக்க வளைவுகள் அனைத்தும் நேர் கோடுகளாகவும் அமையப் பெறுவோம்.

மிகப் பொதுவான உற்பத்திச் சார்பானது $x = 2Hab - Aa^2 - Bb^2$ ஆகும். A, B, H என்பவை நேர்க்கணிய மாறிலிகள். மேலும் $H^2 > AB$ என்ற நிபந்தனையும் அமைகிறது. $b = b_1$ என்று பிரதியிடுகையில், நிலைகுத்துப் பிரிவானது (vertical section)

$$x = -Aa^2 + 2Hb_1 a - Bb_1^2$$

அதாவது $$\left(x - \frac{H^2 - AB}{A} b_1^2\right) = -A\left(a - \frac{H}{A} b_1\right)^2$$

என்று பெறப்படும். எனவே, இப்பிரிவானது நிலைக்குத்து அச்சுடன் கூடிய பரவளைவாக அமைகிறது. உச்சநிலை உற்பத்தி (peak product) $\frac{H^2 - AB}{A} . b_1^2$ என வருகிறது. இதற்குத் தக்க a-ன் மதிப்பு $\frac{H}{A} b_1$ ஆகும். b காரணி அளவு b_1 என்ற நிலையான மதிப்பாகும். மேலும், பூஜ்ய அளவு அல்லது எதிர்க்கணிய மதிப்புள்ள அளவு உற்பத்தியானது, a-ன் மதிப்பு

$\frac{b_1}{A} (H - \sqrt{H^2 - AB})$-க்கு குறைவாகவோ

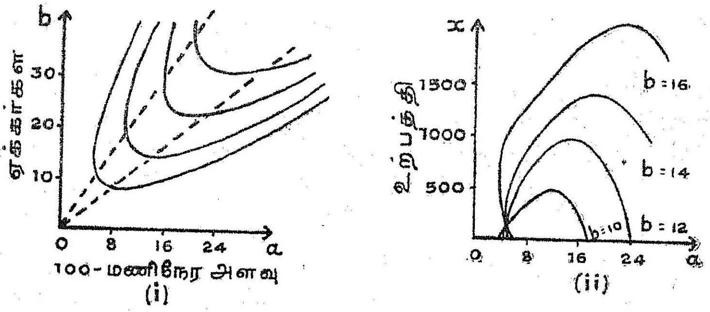
அல்லது

$\frac{b_1}{A} (H + \sqrt{H^2 - AB})$-க்கு அதிகமாகவோ

இருக்கையில் பெறப்படுகிறது. இக் காரணியின் இடைப்பட்ட அளவுகளுக்கு, உற்பத்தியானது பூஜ்யத்திலிருந்து படிப்படியாக அதிகமாகி, உச்ச அளவு உற்பத்தி நிலையினை அடைந்து அதன் பின் படிப்படியாய்க் குறைந்து, மீண்டும் பூஜ்ய நிலையை அடைகிறது.

உதாரணம்

$x = 2(12\,ab - 5a^2 - 4b^2)$ என்ற உற்பத்திச் சார்பானது, $100a$ மணி நேரத்தில், b ஏக்கர் நிலப்பரப்பில் அடையப்படும் மொத்த கோதுமை உற்பத்தி விளைவை குறிப்பதாகக் கொள்க (மரக்கால்களில்) பின்வரும் விளக்கப்படமானது சில சம ஆக்க அளவு வளைகோடுகளையும், செங்குத்துப் பிரிவுகளையும் காட்டுகிறது.



படம் 28.

10 ஏக்கர் பரப்பினில், 400 மணி நேர அளவினுக்குக் குறைந்த உழைப்பின்மூலம் கோதுமை உற்பத்தி அளவு ஏதும் கிடைப்பதில்லை எனவும், மொத்த கோதுமை உற்பத்தியானது 640 மரக்கால் உச்ச அளவிற்கு, 1200 மணி நேர உழைப்பு மூலம் உயர்கின்றதெனவும் அறிகிறோம்.

பயிற்சி

1. கொடுக்கப்பட்ட b ஏக்கர் நிலப்பரப்பில், உழைப்பின் $100 - a$ மணி நேர அளவு பயன்படுத்தப் படுகையில், $x = A.a.^{\alpha} b^{1-\alpha}$ என்ற அளவு கோதுமை (மரக்கால்களில் — in bushels) பெறப்படுவதாக அறிகிறோம். இந்த உற்பத்தி விதியின்படி, 100 ஏக்கர் நிலப்பரப்பில், 10,000 மணி நேர உழைப்பு பயன்படுத்தப் படுகையில், கிடைக்கும் உற்பத்தி

அளவு 1500 மரக்கால்களெனவும், மேலும் அதே நிலப்பரப்பில் (அதாவது, 100 ஏக்கரில்) 20,000 மணி நேர உழைப்பு பயன் படுத்துகையில் பெறப்படும். உற்பத்தியின் அளவு 2120 மரக் கால்களெனவும் கொடுக்கப்படுகிறது. இந்த நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்தி, A, α என்ற இரு மாறிலிகளின் மதிப்புகளையும் கணக்கிடுக. 100 ஏக்கர் நிலப்பரப்பில் வெவ்வேறு கால அளவில் உழைப்பு பயன்படுத்தப் படுகையில் கிடைக்கும் உற்பத்தி அளவு மாறுபாட்டினை வரை படத்தின்மூலம் விளக்கவும். 150 ஏக்கர் நிலப்பரப்பில், 20,000 மணி நேர உழைப்பு பயன்படுத்தப் படுகையில் ஏற்படும் உற்பத்தி அளவு என்ன ?

[சென்னை, செப். 1968]

2. உற்பத்திச் சார்பானது $x = Aa^{\alpha} . b^{\beta}$; ($A$, α, β இவை மாறிலிகள்) என்று தரப்படுகிறது. உற்பத்திக் காரணிகள் ஒரு குறிப்பிட்ட விகித அளவில் அதிகரிக்கப்படுகையில், உற்பத்தி அளவானது, $(\alpha + \beta)$ மதிப்பு ஒன்றைவிட (1) அதிகமாகவோ' குறைந்தோ இருக்கும் நிலையினைப் பொறுத்து, அதிகமான அல்லது குறைந்த விகித அளவில் மாறுபடும் எனக் காட்டுக. $\alpha = (1 - \beta)$ என்று இருக்குமெனில், இதன் சிறப்பியல்பு என்ன என்றும் விளக்குக.

3. கொடுக்கப்பட்ட b ஏக்கர் நிலப்பரப்பில், $100a$ மணி நேர அளவு உழைப்பைப் பயன்படுத்தி பெறப்படும் கோதுமை உற்பத்தி

$$x = 40 . \frac{12ab - 5a^2 - 4b^2}{a + b} \text{ மரக்கால்கள்}$$

எனத் தரப்படுகிறது. 10 ஏக்கர் நிலப்பரப்பில் கோதுமை பயிரிடப் படுவதாகக் கொண்டு, a-யின் மாறுபடும் மதிப்பினுக்கு ஏற்ப, உற்பத்தி அளவானது மாறுபடும் தன்மையினை வரை படத்தின் மூலம் காட்டுக. ஏறக்குறைய 1050 மணி நேர அளவு உழைப் பானது பயன்படுத்தப் பெறுகையில், இதே பரப்பில் உச்சநிலை உற்பத்தி அளவு பெறப்படும் என்றும் காட்டுக.

[சென்னை, ஏப்ரல், 1968]

4. கொடுக்கப்பட்ட உற்பத்திச் சார்பு

$$x = \frac{2\ Hab - Aa^2 - Bb^2}{Ca + Db}$$

என்பதனுடைய நிலைக்குத்துப் பிரிவுகளை வரைபடத்தில் கருதுக. (vertical sections) இங்கு, காரணிகள் அனைத்தும் அதிகரிக்கப்

படும் அதே விகிதத்தில் உற்பத்தி விளைவும் அதிகரிக்கும் தன்மையைக் காட்டுக.

[குறிப்பு : $H, A. B, C, D$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளாக ஏதேனும் எண்களைக் கொண்டு, வரைபடம் வரைந்து காட்டவும்.

உதாரணம் :

$$x = \frac{12ab - 5a^2 - 4b^2}{a + b}\ ]$$

5. உற்பத்திச் சார்பானது $x = 10ab$ என்று இருப்பின், சம ஆக்க அளவு வளைவுகளை வரைபடத்தில் காட்டுக. (a, b ஆகிய வற்றுக்கு மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டு, சில புள்ளிகளில் x-ன் மதிப்பு சமமாக அமையும் நிலையினைச் சரிபார்க்க).

6. $x = 0, 2, 4$ என்ற மதிப்புகளைக் கொண்டு, $x = 5 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ என்னும் உற்பத்திச் சார்பின் சம ஆக்க விளைவு வளைவுகளை வரைக.

7. $x = -(2a^2 - 5ab + 2b^2) = -(a - 2b)(2a - b)$ என்ற உற்பத்திச் சார்பின் சமபக்க ஆக்க அளவு விளைவுகளை x-ன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கும் வரையவும். இவ் வளைவுகள் $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(3, 3)$, $(5, 5)$ என்ற புள்ளிகளில் அமைவதைக் காண்க.

8. $x = -(3a^2 - 7ab + 2b^2) = -(3a - b)(a - 2b)$ என்னும் உற்பத்திச் சார்பின் சம ஆக்க அளவு வளைவுகளை வரைந்து காட்டுக. $x = 0, 2, 8$ என்ற மதிப்புகளைக் கருதவும்.

சராசரி உற்பத்தி அளவும், இறுதிநிலை உற்பத்தி அளவும்
(Average Product & Marginal Product)

இவ்விரண்டு கருத்துக்களும் உற்பத்தி இயலில் முக்கிய இடம் வகிக்கின்றன. உற்பத்திக் காரணிகட்டு இவை வரையறுக்கப் படுகின்றன. ஒரே ஒரு காரணி, மாறியாகக் கொள்ளப்படும் நிலையில், சராசரியாக அக்காரணி ஒரு அலகு (one unit) பயன் படுத்தப் படுகையில் கிடைக்கும் உற்பத்தி சராசரி உற்பத்தி என மதிப்பிடப்படும். உதாரணமாக, 10 வேலையாட்கள் அமர்த்தப் படுகையில் கிடைக்கும் மொத்த உற்பத்தி 400 எனக் கொண் டால், உழைப்புக் காரணியின் சராசரி உற்பத்தி, $\frac{400}{10} = 40$

என மதிப்பிடப்படும். எனவே, ஒவ்வொரு உழைப்பாளியும் சராசரியாக 40 எனும் வீதத்தில் உற்பத்தி செய்கிருன்.

இறுதிநிலை உற்பத்தியானது. இறுதிநிலைப் பயனைப் போலவே வரையறுக்கப்படும். வேறுபாட்டுக் காரணியின் (variable factor) மாறுபடும் அளவிற்கு ஏற்ப உற்பத்தி அளவின் மாறுபடும் வீதத்தை இது மதிப்பிடும். உதாரணமாக, 9 வேலையாட்கள் மூலம் 300 என்ற உற்பத்தியும், 10 வேலையாட்கள் மூலம் 400 எனும் உற்பத்தியும் அமைந்திருக்கையில், 10-வது வேலையாளின் இறுதிநிலை உற்பத்தி $400 - 300 = 100$ என மதிப்பிடப்படும். காரணியின் அளவு மிக குறைந்த அளவிலேயே மாற்றப்படல் வேண்டும். கணக்கியல் முறைப்படி இவற்றைக் கீழ்க்கண்டவாறு கண்டறிய இயலும். வகை வேறுபாட்டுக் கணிதத்தின் மற்றொரு பயன் இங்கு (application) காணப்படும்.

X-ன் மொத்த உற்பத்தியானது, A, B காரணிகள் பயன்படுத்தப்படும் அளவுகளைப் பொறுத்து மாறுபடும் தன்மையினை,

$$x = f(a, b)$$

என்ற உற்பத்திச் சார்பு விளக்குகிறது. இதில் b-யின் மதிப்பினை நிலையானதாக, $b = b_1$ என்று, கருதுகையில், a-யின் சராசரி உற்பத்தி அளவானது,

$$\frac{\text{மொத்த உற்பத்தி}}{\text{பயன்படுத்தப்பட்ட } a \text{ அளவு}} \text{ அல்லது } \frac{x}{a}$$

எனப் பெறப்படும். அதாவது, A காரணியை ஒரே ஒரு அலகு பயன்படுத்துகையில் கிடைக்கும் சராசரி உற்பத்தி அளவு இதுவாகும்.

இதேபோல், $a = a_1$ என்ற நிலையான அளவில் a யினைப் பயன்படுத்தி, b-யின் சராசரி உற்பத்தியானது $\frac{x}{b}$ என்று குறிக்கப்படும். இவற்றை, சராசரி உற்பத்தித் திறன் வீதங்கள் எனவும் குறிப்பிடலாம்.

உதாரணம் :

$$x = 2\,Hab - Aa^2 - Bb^2 \qquad (H^2 > AB)$$

என்ற உற்பத்திச் சார்பினில்,

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\,[\,2\,Hab - Aa^2 - Bb^2\,]$$

$$= 2\,Hb - Aa - B\,.\,\frac{b^2}{a}\;;$$

$$\frac{x}{b} = \frac{1}{b}[2Hab - Aa^2 - Bb^2]$$

$$= 2Ha - \frac{Aa^2}{b} - Bb$$

என்று பெறுகிறோம். (b மாறிலியாகும்).

$x = f(a, b)$ என்றும் உற்பத்திச் சார்பில், A காரணியின் இறுதிநிலை உற்பத்தியானது, a-ன் மாறுபாட்டிற்குத்தக்க அளவில் நிகழும் உற்பத்தி அளவு x-ன் வேறுபாட்டு வீதத்தைக் குறிக்கும். இது, இச் சார்பின் (a-ன் மூலம் காணப்படும்) பகுதி வகை வேறுபாட்டுக் கெழுவாகும்.

அதாவது, a-ன் இறுதிநிலை உற்பத்தி $= \frac{\partial x}{\partial a}$. '$\partial$' என்ற குறி, பகுதி வகை வேறுபாட்டுக் கணக்கீட்டை குறிக்கும். இங்கு, b காரணி அளவை மாறிலியாகக் கொள்கிறோம்.

இதேபோல், b காரணியின் இறுதிநிலை உற்பத்தி அளவானது

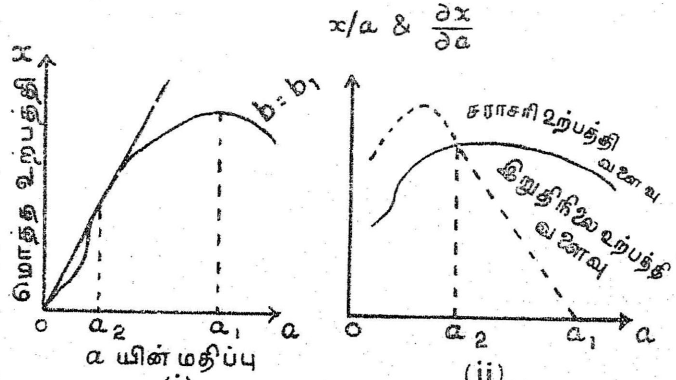
$$b\text{-ன் இறுதிநிலை உற்பத்தி} = \frac{\partial x}{\partial b}$$

என்று குறிக்கப்படும்.

பொதுவாக, எந்த ஒரு உற்பத்திக் காரணிக்கும், சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை உற்பத்தி மதிப்புகளைக் கணக்கிட இம்முறை பயன்படும். மேலே குறிப்பிடப்பட்ட சராசரி, இறுதிநிலை உற்பத்தி அளவுகள், (a, b) என்ற காரணி அளவுகளைப் பொறுத்து மாறுபடும் சார்புகளே ஆகும்.

A, B என்ற இரு மாறுபாட்டுக் காரணிகளுடன், சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை உற்பத்தி அளவுகளை விளக்கப் படத்தின் துணை கொண்டு $x = f(a, b)$ என்ற உற்பத்திச் சார்புப் பரப்பில் நிலைக் குத்துப் பிரிவுகளின் மூலம் எடுத்துக்காட்டலாம். $b = b_1$ என்னும் தளப் பரப்பின் (plane) மூலமாகப் பிரிக்கப்படும் பகுதியானது, A என்ற காரணி பயன்படுத்தப்படும் அளவினைச் சார்ந்து மாறுபடும் உற்பத்தி அளவினைக் குறிக்கும் (b_1 ஆனது, b-ன் நிலையான, மாருத அளவாகும்). இப் பிரிவில், $P(a, b_1)$ என்பது ஒரு புள்ளியாக அமையும் பொழுது, a-ன் சராசரி உற்பத்தி அளவானது OP என்னும் நேர்கோட்டின் (O_a அச்சுடன் தொடர்புற்ற) சாய்வு அளவாகவும் (slope), a-ன் இறுதிநிலை உற்பத்தியானது PT என்னும் தொடுகோட்டின் (O_a-யுடன் தொடர்புற்ற) சாய்வு மதிப்பாகவும் (tangent gradient) குறிக்கப்படுகின்றன.

பொதுவான உற்பத்தி நிலையில், இப்பிரிவானது a என்ற காரணி அளவினைச் சார்ந்த உற்பத்தி அளவாக பெறப்படும். பின் வரும் விளக்கப்படத்தினைக் கருதுக. இதில் இருநிலைகள் விளக்கப் படுகின்றன. சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை உற்பத்தி அளவுகளின் மாறுபாட்டினை மற்றொரு உற்பத்தியானது, படிப்படியாக அதிகரித்து, $a = a_2$ என்ற ஒரு புள்ளியில், உச்சநிலை அடையும். அப்புள்ளியில், உற்பத்தி விளைவின் தொடுகோடானது மையப் புள்ளி (origin) வழியாக செல்கிறது. இந்நிலையில், சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை உற்பத்தி அளவுகள் சமமாக அமைகின்றன. மேலும் $a = a_1$ என்ற அதிகரித்த (மற்றொரு அளவில், உற்பத்தி உச்சநிலை அடைய அதன் விளைவாக, இறுதிநிலை உற்பத்தி பூஜ்ய மதிப்படைகிறது. இம்மூன்று வளைவுகளும், b_1 என்ற b-ன் நிலை யான மதிப்பைப் பொறுத்து அமைவது குறிப்பிடத்தக்கது. b_1 மாறுகையில், இவ் விளைவுகளின் அமைப்பும், வடிவமும் மாறுபடு கின்றன.



படம் 29.

உதாரணம்

$x = 2\,Hab - Aa^2 - Bb^2$; $(H^2 > AB)$ என்ற உற்பத்திச் சார்பில், இறுதிநிலை உற்பத்தி அளவுகளாவன :

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 2\,(Hb - Aa);$$

$$\frac{\partial x}{\partial b} = 2\,(Ha - Bb).$$

a-யினைச் சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்தி வளைவானது, $b = b_1$ என்ற மதிப்பில், a அச்சினை வெட்டிச் செல்லும் கீழ் நோக்கிச் சரிந்த ஒரு நேர் கோடாக அமைந்திருக்கும். a-ன் மதிப்பு, இங்கு $\frac{H}{A} \cdot b_1$ என்று பெறப்படும். அம் மதிப்பில் உற்பத்தி அளவானது உச்சநிலையில் உள்ளதென அறிவோம்.

ஏனெனில், நிபந்தனைப்படி $\frac{\partial x}{\partial a} = 0$ என்பதிலிருந்து

$$2\,(Hb - Aa) = 0$$

அதாவது $Hb_1 - Aa = 0$

அல்லது $a = \frac{H}{A} \cdot b_1$ என்பதாகும்.

இந்தச் சார்பினுக்கேற்ற சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை உற்பத்தி வளைவுகள் இயல்பான (normal) வடிவில் அமைந்திருக்க காணலாம்.

இதேபோல, எந்த ஒரு உற்பத்திச் சார்பினுக்கும் அதனுடைய சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை உற்பத்தி அளவுகளைக் கருதலாம்.

உற்பத்திச் சார்பின் குறிப்பிட்ட வகையான 'ஒரு படித்தான உற்பத்திச் சார்புகள்' பற்றிக் கருதுமுன் சில கணித உண்மைகளை அறிகிறோம்.

ஒரு படித்தான (அல்லது ஓரின) சார்புகள் (Homogeneous functions)

இரு மாறிகளைச் சார்ந்து மாறும் தன்மையுடைய $z = f(x, y)$ என்ற சார்பினை கருதுக. இதில், x, y என்னும் இருமாறிகளின் மதிப்புகளையும் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவிலிருந்து, ஒரு நிலையான விகிதத்தில் அதிகரிக்கவோ அல்லது குறைக்கவோ செய்யும் நிலையில், z ன் மதிப்பானது அதிகமான அல்லது சமமானது, அல்லது குறைவான விகிதத்தில் மாறுவதைக் காணலாம். குறிப்பாக, x, y என்ற மாறிகள் வேறுபடும் விகித அளவிலேயே, $z = f(x, y)$ சார்பின் மதிப்பும் அதிகரிக்கவோ, குறையவோ செய்யும்பொழுது, இச்சார்பானது முதல்நிலை (linear) ஒருபடித்தான சார்பு எனக் கூறப்படும். தெளிவாகப் பின்வரும் வரையறையைக் கருதுவோம்.

வரையறை

$z = f(x, y)$ என்பது பின்வரும் நிபந்தனைகட்கு உட்பட்டு இருப்பின், முதல்நிலை ஒருபடித்தான சார்பு எனப்படும்.

எந்த (x, y) மதிப்பினிலும்,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda . f(x, y) \quad [\lambda = \text{மாறிலி}]$$

என அமைதல் வேண்டும். λ-வின் மதிப்பு என்னவாயினும் இருக்கலாம்.

அதாவது, x, y மாறிகளின் மதிப்புக்கள் λ என்ற மாறிலியால் பெருக்கப்படுகையில், z என்ற சார்பும் அதே λ வினால் பெருக்கப் படும் அதாவது, x, y ஆகிய மாறிகள் λ மடங்கு மதிப்பில் அதிகரிக்கையில், z-ன் மதிப்பும் λ மடங்கு உயர்கிறது. இதுவே நேர்கோட்டு வடிவில் அமையும் ஓரினச் சார்பினது விளக்கமாகும்.

பொதுவாக $z = f(x, y)$ என்ற சார்பு K-ஆம் படி ஓரினச் சார்பாகக் கருதப்பட வேண்டுமெனில்

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^K . f(x, y)$$

என்னும் நிபந்தனைக்குட்பட வேண்டும்.

பின்வரும் சார்புகளை, முதல்நிலை ஒருபடித்தான சார்புக்கு உதாரணங்களாகக் கொள்ளலாம் :

(i) $z = ax + by$;

(ii) $z = a . x^{\alpha} . y^{1-\alpha}$

(iii) $z = \sqrt{ax^2 + 2hxy + by^2}$;

(iv) $z = \dfrac{ax^2 + 2hxy + by^2}{cx + dy}$

a, b, c, α ... ஆகியவை நேர்க்கணிய (+) மாறிலிகளாகும்.

$z = ax^2 + 2hxy + by^2$ $\longrightarrow$ 2-ம் நிலை ஓரினச் சார்பு.

$z = a . x^{\alpha} . y^{\beta}$ $(\alpha, \beta > 0)$ என்பது $(\alpha + \beta)$ நிலை ஒருபடித்தான சார்பு.

உதாரணம்

$z = x^2 + 4xy + 3y^2$ என்ற சார்பினை கருதுக.

x, y மாறிகளை, λ மாறிலிகளால் பெருக்குக.

அப்பொழுது,

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 + 4(\lambda x)(\lambda y) + 3(\lambda y)^2 \\ &= \lambda^2 x^2 + 4\lambda^2 xy + 3\lambda^2 y^2 \\ &= \lambda^2 [x^2 + 4xy + 3y^2] \\ &= \lambda^2 . f(x, y) = \lambda^2 z. \end{aligned}$$

$\therefore$ இது 2-ம் படி ஓரினச் சார்பு.

ஆயிலரின் (Euler) தேற்றமும், மற்ற இயல்புகளும்

எளிதாக இருக்கும் பொருட்டு, நேர் கோட்டு ஓரினச் சார்பு $z = f(x, y)$ யினை கருதுவோம். (x, y) என்னும் எந்த மதிப்பிலும் இச் சார்பு பின்வரும் இயல்புகளைப் பெற்றிருக்கும்.

(i) இச் சார்பினை

$$z = x . \phi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ அல்லது}$$

$$z = y . \psi\left(\frac{x}{y}\right) \text{ என்னும் வடிவில்}$$

எழுதலாம். ϕ, ψ ஆகியவை ஒரு மாறியினைச் சார்ந்த சார்புகள்.

நிரூபணம்

λ -ன் எந்த மதிப்பிலும்,

$$f(\lambda x, \lambda y) = -\lambda . f(x, y)$$

எனவே $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x} . f(x, y) \quad \left(\lambda = \frac{1}{x} \text{ என பிரதியிட}\right)$

அதாவது $z = x . f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

$$= x\, \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\left(\because f\left(1, \frac{y}{x}\right) \text{ என்பது } \frac{y}{x} \text{ ஐச் சார்ந்தது}\right)$$

இதே போல, $\lambda = \frac{1}{y}$ என்று பிரதியிடுகையில்,

$$z = y \cdot f\left(\frac{x}{y}, 1\right)$$

$$= y \cdot \psi\left(\frac{x}{y}\right) \text{ எனப் பெறலாம்.}$$

(ii) $z = f(x, y)$ என்ற சார்பின் பகுதிவகை வேறுபாட்டுக் கெழுக்களான $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ஆகியவை x, y இவற்றின் விகிதத்தினைச் சார்ந்த சார்புகளாகவே அமைந்திருக்கின்றன.

நிரூபணம்

$z = x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ என்பதைக் கருதுக. இதன் x தொடர்புள்ள வேறுபாடு,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \text{ ஆகும்.}$$

$\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$ என்பது, $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ என்ற ஒரு மாறியினைச் சார்ந்த சார்பினது வகை வேறுபாட்டுக் கெழுவாகும்.

மேலும்,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

எனவே, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ இரண்டும் $\frac{y}{x}$ என்ற (மாறிகளின்) விகிதத்தினைச் சார்ந்த சார்புகளாகக் காணலாம்.

(iii) **ஆயிலரின் தேற்றம்** (Euler's theorem)

$z = f(x, y)$ என்ற நேர்கோட்டு ஓரினச் சார்பில்,

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

நிரூபணம்

இயல்பு (ii)-ன் மூலமாக

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\& \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \text{ என அறிகிறோம்.}$$

எனவே,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x \left[\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right] + y \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

அதாவது,

$$x \frac{\partial y}{\partial y} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x\, \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - y.\, \varphi^1\left(\frac{y}{x}\right) + y.\, \varphi^1\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= x.\, \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= z$$

$$\therefore \quad z = x.\, \frac{\partial z}{\partial x} + y.\, \frac{\partial z}{x\partial}.$$

இதுவே ஆயிலரின் விதியாகும்.

(iv) $z = f(x, y)$ என்ற சார்பின் நேரடியான இரண்டாம் நிலைப் பகுதி வகை வேறுபாட்டுக் கெழுக்களை (direct second order), குறுக்கீட்டு இரண்டாம் நிலைப் பகுதி வேறுபாட்டு கெழுக்களின் மூலம் (Cross-order partial derivatives)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y}{x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \text{ எனவும்}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$$

எனவும் குறிக்கலாம்.

நிரூபணம்

ஆயிலரின் தேற்றமானது, (x, y) ஆகியவற்றின் எந்த மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும். அதாவது, $x \frac{\partial z}{\partial x} + y. \frac{\partial z}{\partial y}$ என்பது முற்றிலும் ஒத்த அளவில் z-ன் மதிப்புக்குச் சமமாகிறது. எனவே, வகை வேறுபாடானது, மற்றொன்றின் பகுதி வகை வேறு பாட்டிற்குச் சமமாகும்.

$$\text{அதாவது,} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right] = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\text{அதாவது,} \quad \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\text{அல்லது,} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = - \frac{y}{x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

இதே முறையில், மற்றொரு பகுதி வகை வேறுபாட்டுக் கெழுவானது

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = - \frac{x}{y} . \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

என்றாகும். இந்த நான்கு இயல்புகளும் முதலாம் படி ஓரினச் சார்பினை (Linear homogeneous) வரையறுப்பனவாகும்.

பொதுவாக

$z = f(x, y)$ ஆனது k-ஆம் படி ஓரினச் சார்பாக அமைந்தால், இந் நான்கு இயல்புகளும் பின்வருமாறு இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

(1) $z = x^K . \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ அல்லது

$$z = y^K . \psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ என்ற இரு பகுதிவகை வேறுபாட்டுக் கெழுக்களும், $(K - 1)$-ஆம் படி ஓரினச் சார்புகளாக அமையும். எனவே, வகையிடலின் மூலம், சார்பின் ஒருபடி குறைவதைக் காணலாம்.

(3) $x . \frac{\partial z}{\partial x} + y . \frac{\partial z}{\partial y} = K . z;$

$$(4) \quad x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = K(K-1) \cdot z$$

நேர்கோட்டு ஒருபடித்தான உற்பத்திச் சார்பு (Linear homogene - ous production function)

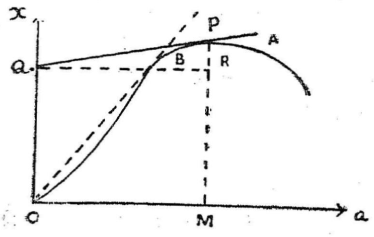
மாறுபாட்டுக் காரணி அளவுகளைச் சார்ந்த உற்பத்திச் சார்பு நேர் கோட்டு ஓரின வடிவில் அமைந்திருப்பின் பின்வரும் நிலையினைக் காணலாம். இது ஒரு குறிப்பான நிலை (special case) ஆகும். இத்தகைய சார்பின் இயல்புப்படி, உற்பத்திக் காரணிகள் ஒரு குறிப்பிட்ட விகித அளவில் அதிகரிக்கப் படுகையில், உற்பத்தி அளவும் அதே விகிதத்தில் அதிகரிக்கப்படும். இங்கு, ஒவ்வொரு காரணிக்கும் சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை உற்பத்தி அளவுகள் மாறுபடாதிருக்கக் காணலாம். இந்நிலையானது, 'விகித அளவு சார்ந்த நிலையான உற்பத்தி விளைவுகள்' (constant returns to scale) என்று கூறப்படும். அதாவது உற்பத்தி அதிகரிப்பு விகிதம், காரணிகளின் அதிகரிப்பு விகிதத்திற்கு சமமாய் உள்ளது. இங்கு, உற்பத்திக் காரணிகள் பயன்படுத்தப்படும் விகித அளவே முக்கியத்துவம் பெறுகிறது. உதாரணமாக, கோதுமை உற்பத்தியில், உழைப்பும், நிலமும் பயன் பயன்படுவதாகக் கொள்வோம். இரு மடங்குப் பரப்பு நிலத்தில், இரண்டு பங்கு உழைப்பினைப் பயன்படுத்துகையில், மொத்த உற்பத்தி அளவும் இரட்டிப்பாகிறது. நிலையான உற்பத்தி விகித விளைவு விதி செயல்படுகிறது.

A, B என்ற இரு காரணிகளைப் பயன்படுத்துகையில், உற்பத்திச் சார்பினைக் காட்டும் மேற்பரப்பானது (surface), ஆரம்பப் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர் கோடுகளைக் கொண்டு அமைந்திருக்கும். OX என்ற அச்சின் மூலமாக உள்ள எப் பகுதியும் ஒவ்வொரு நேர் கோட்டினைக் கொண்டதாய் இருக்கும். B என்ற காரணி அதிகரிக்கையில், A காரணியை அதிகரித்துப் பயன்படுத்துவதால் பெறப்படும் உச்ச நிலை உற்பத்தியானது விகித அளவில் அதிகரிக்கும்.

ஆயிலரின் தேற்றப்படி, எந்த (a, b) மதிப்பிற்கும்

$$x = a \cdot \frac{\partial x}{\partial a} + b \cdot \frac{\partial x}{\partial b}$$

என அமையும். இதனை விளக்கப் படத்தின்மூலம் நன்கு எடுத்துரைக்கலாம்.



படம் 30.

உற்பத்தி அளவு மேற்பரப்பில், காரணிகளின் (a, b) என்ற தொகுப்பில், P என்னும் ஒரு புள்ளியைக் கருதுவோம். PQ என்ற தொடு கோட்டினை, Ob அச்சுக்கு நிலைக்குத்தான பிரிவில், வரைவதன்மூலம்

$$\frac{\partial x}{\partial a} = PQ\text{-வின் சாய்வு வீதம்}$$

$$= \frac{RP}{QR} = \frac{RP}{OM}.$$

அதாவது, $a \cdot \frac{\partial x}{\partial a} = RP.$

எனவே, $b \cdot \frac{\partial x}{\partial b} = x - a \cdot \frac{\partial x}{\partial a}$

$$= x - RP = MP - RP$$

$$= MR.$$

எனவே, MP என்னும் மொத்த உற்பத்தி அளவானது,

$$MR = b \cdot \frac{\partial x}{\partial b} \text{ எனவும், } RP = a \cdot \frac{\partial x}{\partial a}$$

எனவும் பிரிக்கப்படுகிறது. இப்பகுதியில், உற்பத்தி அளவு உச்ச நிலையில் உள்ள A என்னும் புள்ளியில் $\frac{\partial x}{\partial a} = 0$ என்பதால், $\frac{\partial x}{\partial b} = \frac{x}{b}$ என்று பெறப்படும். இத்தகைய புள்ளியில், B-ன் சராசரி உற்பத்தி அளவானது, a அச்சுக்கு செங்குத்தான மற்றொரு பகுதியில் உச்ச நிலையினை அடையும்.

இதேபோல, A-ன் சராசரி உற்பத்தி அளவானது உச்ச நிலையில் உள்ள B என்னும் புள்ளியில், $\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{x}{a}$.

எனவே, $\frac{\partial x}{\partial b} = 0$ என்றாகும். அதாவது, a அச்சுக்குச் செங்குத்தான மற்றொரு பகுதியில் உற்பத்தி அளவு உச்சமாகும். ஒரு காரணியை மாற்றுவதன்மூலம் உச்சநிலை அடையப்பெற்ற

மொத்த உற்பத்தி அளவிற்கும், மற்றொரு காரணியை மாற்றுவதன் மூலம் உச்சநிலை அடைந்த சராசரி உற்பத்தி அளவிற்கும் ஒரு தொடர்பு உள்ளது.

'நிலையான உற்பத்தி விளைவு விகிதம்' என்ற நியதிக்குட்பட்ட நேர்கோட்டு ஒரு படித்தான உற்பத்திச் சார்பாகப் பின்வரும் உதாரணங்களைக் கருதலாம்.

1. $x = Aa^{\alpha} b^{1-\alpha}$ (காப்-டக்ளஸ் (Cobb Douglas) உற்பத்திச் சார்பு)

2. $x = \dfrac{2Hab - Aa^2 - Bb^2}{Ca + Db}$; $H^2 > AB$.

3. $x = \sqrt{2Hab - Aa^2 - Bb^2}$; $H^2 > AB$.

மேற் குறிப்பிட்ட ஒவ்வொரு சார்பிலும், சராசரி உற்பத்தி அளவுகள் $\dfrac{x}{a}$, $\dfrac{x}{b}$ ம், இறுதிநிலை உற்பத்தி விளைவுகள் $\dfrac{\partial x}{\partial a}$, $\dfrac{\partial x}{\partial b}$ என்பனவும் $\dfrac{b}{a}$-யினைச் சார்ந்த சார்புகளென நிரூபிக்கலாம்.

பயிற்சி

1. b ஏக்கர் நிலப் பரப்பில், $100a$ மணி நேர அளவு உழைப்பானது பயன்படுத்தப்படுகையில், $x = 2(12ab - 5a^2 - 4b^2)$ மரக்கால் அளவுள்ள கோதுமை உற்பத்தி செய்யப் படுகிறது. 10 ஏக்கர் நிலப்பரப்பில், கோதுமையானது பயிரிடப் படின், உழைப்பின் சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை உற்பத்தி விளைவு களை வரைபடத்தின் மூலம் காட்டுக.

2. b ஏக்கர் பரப்பில், $100a$ மணி நேர உழைப்பைப் பயன் படுத்தி, கோதுமை உற்பத்தியானது $x = \dfrac{40}{a+b}(12ab - 5a^2 - 4b^2)$ என்று பெறப்படுகையில், (a) 10 ஏக்கர்கள், (b) 100 ஏக்கர்கள் என்ற நிலப் பரப்புகட்கு ஏற்ற, உழைப்பின் சராசரி மற்றும் இறுதி உற்பத்தி அளவுகளைக் காட்டும் விளைவுகளை வரைந்து விளக்கம் தருக. இரண்டு நிலைகளிலும் பெறப்படும் சராசரி உற்பத்தி அள வானது சம்மாக அமைந்திருப்பதைக் காட்டுக. முதல் நிலையுடன் ஒப்பிடுகையில், இந்நிலையில் 10 மடங்கு அதிகமான உழைப்பு தேவைப்படுகிறது.

3. $x = \dfrac{2Hab - Aa^2 - Bb^2}{Ca + Db}$ என்ற நேர்கோட்டு ஒரு படித்தான உற்பத்திச் சார்பில், காரணிகளின் சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை உற்பத்தி அளவுகள், காரணி அளவுகளின் (a, b) விகிதத்தையே சார்ந்துள்ளன என நிரூபிக்க. மேலும், இங்கு, மொத்த உற்பத்தி விளைவானது, a-மடங்கு A காரணியின் இறுதி நிலை உற்பத்தியினையும், b-மடங்கு B காரணியின் இறுதிநிலை உற்பத்தியினையும் கூட்டிவரும் மதிப்புக்குச் சமம் என்பதை நிரூபிக்க.

$$\left(\text{அதாவது, } a \cdot \frac{\partial x}{\partial a} + b \cdot \frac{\partial x}{\partial b} = x\right)$$

[சென்னை, ஏப்ரல், 1967]

4. $x = \sqrt{2Hab - Aa^2 - Bb^2}$ என்ற நேர்கோட்டு, ஒரு படித்தான உற்பத்திச் சார்பில், A காரணியின் சராசரி உற்பத்தியின் உச்சநிலை மதிப்பானது, B காரணியின் குறிப்பிட்ட நிலையான அளவினைச் சாராத $\sqrt{\dfrac{H^2 - AB}{B}}$ என்ற மாறிலியாக அமைவதை காட்டுக.

5. உற்பத்திச் சார்பானது $x = A \cdot a^{\alpha} \cdot b^{\beta}$ என்பதாகும். இதில், $(\alpha + \beta) < 1$ என்ற நிபந்தனை அமையும். இச் சார்பிற்கு, குறைந்து செல் விளைவு விகித (diminishing returns to scale) விதியானது பொருந்துவதெனக் காட்டு. மேலும், மொத்த உற்பத்தி விளைவானது, a - மடங்கு A-ன் இறுதிநிலை உற்பத்தி, b - மடங்கு B-ன் இறுதிநிலை உற்பத்தி ஆகியவற்றின் கூட்டு மதிப்பினை விட அதிகமாக உள்ளதெனவும் காட்டு.

6. ஒரு பொருளின் உற்பத்திச் சார்பு $x = 10a - a^2 + ab$ என்பதாகும். A, B ஆகிய காரணிகளின் இறுதிநிலை உற்பத்திகளைக் கண்டறிக. அவற்றின் மதிப்புகளை $a = 2$, $b = 6$ என்ற காரணி அளவுகட்குக் கணக்கிடவும்.

7. ஒரு பொருளின் உற்பத்தித் திட்டம் அல்லது சார்பு $x = 10a + 20b + 8c - a^2 + 2b^2 - c^2 + abc$ என்றால், (a) A, B, C ஆகிய காரணிகளின் இறுதிநிலை உற்பத்தித் திறனை மதிப்பிடு; (b) இந்த இறுதிநிலை உற்பத்தித் திறன்களை $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$ என்ற மதிப்புகட்குக் கணக்கிடவும்.

[சென்னை, ஏப்ரல், 1971]

8. $x = 100a + 200b + 50c - a^2 - 2b^2 - 3c^2 - 5ab + 3ac - bc$ என்ற உற்பத்திச் சார்பினில், A, B, C ஆகியவற்றின் இறுதிநிலை உற்பத்தித் திறனைக் காண்க. $a = 1$; $b = 2$; $c = 5$ என்றால், அவற்றின் மதிப்புகளைத் தீர்மானிக்கவும்.

9. பின்வரும் உற்பத்திச் சார்புகட்கு, இறுதிநிலை உற்பத்தித் திறன்களைக் காண்க :

(a) $x = 5 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$; $a = 1$, $b = 1$

(b) $x = 4(4ab - a^2 - 3b^2)$; $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$

(c) $x = 5 - \frac{1}{a} - \frac{2}{b}$; $a = 1$, $b = 1$

(d) $x = 5ab - 2a^2 - 2b^2$; $a = 1$, $b = 1$.

10. ஆஸ்திரேலிய நாட்டின், 1934 — '35-ம் ஆண்டுக்கான உற்பத்திச் சார்பானது, டக்ளஸ் மற்றும் கன் (Douglas & Gunn) என்போரால், $x = L^{0.64} . C^{0.36}$ என வரையறுக்கப்பட்டது. x என்பது உற்பத்தி விளைவையும், L என்பது உழைப்பு காரணியினையும், C என்பது முதலையும் குறிப்பிடும். இந்நிலையில், L, C ஆகிய காரணிகளின் இறுதிநிலை உற்பத்தித் திறன் மதிப்புகளைக் காண்க. $L = 1{\cdot}5$; $C = 1{\cdot}1$ எனில் அவற்றின் மதிப்புகள் யாவை ?

11. 1919-ஆம் ஆண்டில், அமெரிக்க ஐக்கிய நாடுகளின் உற்பத்திச் சார்பானது, டக்ளஸ், கன் ஆகியோரால் $x = L^{0.76} . C^{0.25}$ என்பதாக மதிப்பிடப்பட்டது. x உற்பத்தி அளவு; L; உழைப்பு; C: முதல். L, C ஆகியவற்றின் இறுதிநிலை உற்பத்தித் திறன்களை காண்க. $L = 1$; $C = 1$ என்றால் அவற்றின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடவும்.

12. 1937-ஆம் ஆண்டுக்கான. கானடா நாட்டின் உற்பத்திச் சார்பானது, டக்ளஸ், டாலி ஆகியோரால் (Douglas & Daly), $x = L^{0.43} . C^{0.58}$ என மதிப்பிட்டது. x உற்பத்தி விளைவு, L: உழைப்பு, C: முதல். L, C ஆகிய காரணிகளின் இறுதிநிலை உற்பத்தித் திறன்களை கணக்கிட்டு, $C = 0{\cdot}9$, $L = 0{\cdot}8$ என்ற நிலையில் அவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

13. 1921 — 1941 காலத்துக்கான அமெரிக்க ஐக்கிய நாடுகளின் உற்பத்திச் சார்பானது $x = a^{2.18} . b^{0.34}$ என்று மதிப்பிடப்

பட்டது. x உற்பத்தி அளவு, a: உழைப்பின் அளவு, b: நிலையான முதல் (டின்ட்னரின் கருத்து). உழைப்பு, முதல் ஆகிய காரணிகளின் இறுதிநிலை உற்பத்தி அளவுகளைக் கணக்கிடுக. a: 1·7, $b = 2$ என்றால், அவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

14. 1899—1922 கால இடைவெளிக்கான உற்பத்தி சார்பானது, பால் டக்ளஸினால் (Paul Douglas) $x = 1{\cdot}01 . L^{0{\cdot}75} . C^{0{\cdot}25}$ என்று மதிப்பிடப்பட்டது. x: மொத்த உற்பத்தி விளைவு; L: உழைப்பு, C = முதல்.

(a) L, C ஆகிய காரணிகளின் இறுதிநிலை உற்பத்தித் திறன்களை மதிப்பிடுக. $L = 160$, $C = 130$ என்று பிரதியிட்டு அவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(b) இச் சார்பானது நேர் கோட்டு ஒருபடித்தான சார்பாக உள்ளதா எனக் காண்க, ஆயிலரின் விதியினைச் சரிபார்க்கவும். உழைப்பின் அளவும், முதலின் அளவும் இரு மடங்காக்கப் படுகையில், ஏற்படும் உற்பத்தி விளைவு என்ன ?

15. மேலே கொடுக்கப்பட்ட 10-வது கணக்கில் குறிப்பிட்ட உற்பத்திச் சார்பானது நேர் கோட்டு ஒருபடித்தான சார்பாக அமைகிறதா எனக் காண்க. ஆயிலரின் விதியினைச் சரி பார்க்கவும்

10. உற்பத்தி விளைவின் விதிகள்-காரணிகளின் பதிலீடு

(Laws of Returns and Substitution of Factors)

உற்பத்தி விளைவுகளின் விதிகள் (Laws of Returns)

பொருளாதார வல்லுநர்கள் மூன்று வகையான விளைவு விதிகளை வரையறுக்கின்றனர். அவையாவன : (1) குறைந்து செல் விளைவு விதி ; (2) வளர்ந்து செல் விளைவு விதி ; (3) மாருத விளைவு விதி (Diminishing increasing & Constant returns). அதாவது, இறுதிநிலை விளைவுகள் (marginal returns) உயர்ந்தோ, தாழ்ந்தோ அல்லது மாருமலோ இருக்கும் நிலையினுக்கேற்ப உற்பத்தி விளைவும் அதிகரிக்கவோ, குறையவோ, மாருதிருக்கவோ செய்கிறது. இது ஒரு உற்பத்திக் காரணி பயன்படுத்தப்படும் அளவுடன் தொடர்புடையதாகும். இதே நிலைகளை உற்பத்திச் செலவின் வாயிலாகப் பின்வருமாறு குறிப்பிடுகிறோம். தொழில் வளர்ச்சிக் கேற்ப, இறுதிநிலை உற்பத்திச் செலவானது தாழ்ந்தோ உயர்ந்தோ அல்லது மாருமலோ இருக்கையில் வளர்ந்து செல், அல்லது மாருத விளைவு நிலைகளைக் காண்கிறோம். இம் மூன்று விதிகளையும் கீழ்க்கண்டவாறு பகுத்து ஆய்கிறோம்.

குறைந்துசெல் விளைவு விதி (Law of Diminishing Returns)

இவ் விதியானது, குறுகியதொரு காலத்தில் ஒரு சமூகத்தில் காணப்படும் நிலையினைக் குறிப்பிடுகிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் உற்பத்தி காரணிகளை எந்த வீதத்தில் பயன்படுத்துவது அனுகூலமாக அமையும் என்பதைப்பற்றி அது கருதுகிறது. உதாரணமாக, ஒரு தொழிலதிபர் தனது சிறிய தொழில் வளர்வதற்கான சாத்தியக் கூறுகளைக் கருதுவர். தற்போதைய தொழில் நுட்ப அறிவு வளர்ச்சி நிலையில், இருக்கின்ற உற்பத்திக் காரணிகளை எவ்வாறு பயனுள்ள விதத்தில் உபயோகிப்பது என்பது பிரச்சினையாகும். நீண்டதொரு கால அளவினைக் கருதும்போது,

தொழில் நுட்ப அறிவு வளர்ச்சி மூலமாக, உற்பத்திக் காரணிகளை வேறு விதமாகக் கலந்து பயன்படுத்துவதன் விளைவாக இப்போதைய நிலையினைவிட அதிக அளவு உற்பத்தி செய்ய இயலும் என்பது வேறொரு கருத்தாகும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட தொழில் நுணுக்க நிலையின் அடிப்படையில் இவ்விதி வரையறுக்கப்படுகின்றது.

விவசாயத்துறையுடன் இவ் விதியானது மிகத் தொடர்புடையதாகும். "பொருளின் உற்பத்தியுடன் தொடர்பு கொண்ட மற்ற எல்லாக் கூறுகளும் மாறாது நிலையாய் உள்ளன என்ற நிபந்தனையின் அடிப்படையில், தொடர்ந்து அதிகமான அளவில் உழைப்பினையும் முதலினையும் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு நிலப்பரப்பில் செலுத்துவோமெனில், இறுதியில் உற்பத்தி அளவு குறைந்த விகிதத்திலேயே அதிகரிக்கும்" என்பது இந்த விதியின் பொது வரையறை. உதாரணமாக, உழைப்பையும் முதலையும் இருமடங்காகப் பயன்படுத்துகையில், உற்பத்தி அளவும் இரட்டிப்பாக அதிகரிப்பதில்லை என வலியுறுத்துவது இதன் நோக்கம். முதலீடு அதிகரிக்கப்படுகையில், உற்பத்தியும் அதிகமாகவே செய்யும். ஆனால், உற்பத்தி அளவு குறைந்த விகிதத்தில் அதிகரிக்கும் என இந்த விதி குறிப்பிடுகிறது.

குறைந்துசெல் விளைவு விதியினை (மார்ஷல் நிர்ணயித்தபடி) பின்வருமாறு வரையலாம் :

"பயிரிடப்படும் குறிப்பிட்ட நிலப்பரப்பில், உழைப்பினையும் முதலினையும் அதிகரித்த அளவில் பயன்படுத்துகையில் ஏற்படும் உற்பத்தி விளைவானது குறைந்த விகிதத்தில் அதிகரிக்கின்றது. தொழில் அறிவு விவசாயத்துறையில் மாறாமல் இருக்கும் நிலையில் இது வரையப்படுகிறது.

பொதுவாக ஒரு உற்பத்திக் காரணியினை λ சதவீதம் அதிகரித்தால் மொத்த உற்பத்தி அளவும் அதே λ அளவு (சதவீதம்) அதிகரிக்காமல், அதைவிடக் குறைந்த வீதத்தில்தான் அதிகரிக்கும்.

இந்த விதி குறிப்பிடும் உண்மைகளை எடுத்துக் கூறுவதற்குப் பின்வரும் எளிய உதாரணத்தினைக் கருதுவோம்.

கோதுமை விளைவிக்க ஒரே இயல்புடைய அலகுகள் அமைந்த இரு உற்பத்திக் காரணிகள் மட்டும்—அதாவது, நிலமும் உழைப்பும்—பயன்படுத்துவதெனக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு உழைப்

பாளிக்கும் ஒரே வகையான கருவிகள் மற்றும் உரம், விதை ஆகியவை இருப்பதாகவும் கொள்வோம். இந்த அனுமானத்துடன் ஒரு சதுரமைல் அளவு நிலப்பரப்பில் இத்தனை உழைப்பாளிகள் என்றும் வைத்துக்கொள்வோம். காரணிகளில் விகிதாச்சாரங்களில் ஏற்படும் மாறுதல் இவ்விதிக்கு முக்கியமானதெனவும் அறிகிறோம். பின்வரும் அட்டவணையினைக் கருதுக :

தொழிலாளிகள் எண்ணிக்கை	மொத்த உற்பத்தி	இறுதிநிலை உற்பத்தி	சராசரி உற்பத்தி
1	60	60	60
2	150	90	75
3	300	150	100
4	420	120	105
5	500	80	100
6	564	64	94
7	602	38	86
8	624	22	78
9	624	0	69.3
10	610	—14	61

10-வது உழைப்பாளியிலிருந்து, மொத்த உற்பத்தியானது படிப்படியாகக் குறைகிறது, 9-வது உழைப்பாளியைச் சேர்க்கும் பொழுது அதிகப்படி விளைவு ஏதும் கிடைப்பதில்லை. எனவே, 8 உழைப்பாளிகளுக்குமேல் பயன்படுத்துவது அனுகூலமாக அமைவதில்லை.

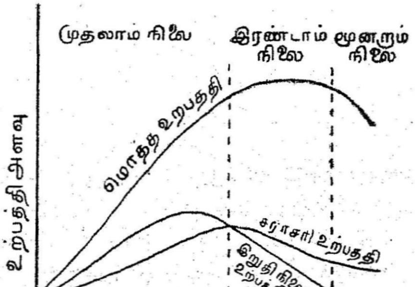
இறுதிநிலை உற்பத்தியானது மேலும் ஒரு தொழிலாளியை வேலைக்கு அமர்த்துவதன் மூலம் மொத்த உற்பத்தியில் ஏற்படும் அதிகரிப்பாகும். 3-வது தொழிலாளி நிலை வரையில் இது அதிகரித்து வந்து, 3-வது தொழிலாளி அமர்த்தப்படுகையில் உச்சநிலை அடைகிறது. அதிக வீதத்தில் உற்பத்தி அதிகரிக்கும் வரையில்

அதிகப்படி தொழிலாளிகள் அமர்த்தப்படுவது இலாபகரமாக அமையும். 9-வது மற்றும் 10-வது தொழிலாளிகள் அமர்த்தப்படுவது இறுதிநிலை உற்பத்தியினை பூஜ்யமாகவும், எதிர் (—) எண்ணாகவும் மாற்றுகிறது. உற்பத்திக் காரணி அதிகரிக்கப்படுகையில், இறுதிநிலை உற்பத்தி அளவு குறையத் துவங்கும். இந்தப் புள்ளியினை, குறைந்துசெல் இறுதிநிலை விளைவு புள்ளியெனக் கூறுகிறோம்.

மொத்த உற்பத்தியினைத் தொழிலாளிகளின் எண்ணிக்கையால் வகுக்க சராசரி உற்பத்தி கிடைக்கிறது. இங்கு, சராசரி உற்பத்தியானது 4-வது தொழிலாளி அமர்த்தப்படும் நிலையில் உச்ச கட்டத்தை அடைகிறது. இறுதிநிலை உற்பத்தியைவிட இது ஒருபடி அதிகமான நிலையாகும். ஏதோ ஒரு கட்டத்தில், இறுதிநிலை உற்பத்தியும் சராசரி உற்பத்தியும் சமமாகின்றன. ஆனால், இந்தச் சமநிலை எப்பொழுதும் அமைவதில்லை. இறுதிநிலை உற்பத்தி குறைகையில் சராசரி உற்பத்தி அதிகரிக்க வாய்ப்பு இருக்கிறது.

இறுதிநிலை உற்பத்தி அளவானது பூஜ்யமாக அமையும் கட்டத்தில், மொத்த உற்பத்தியானது உச்ச மதிப்பைப் பெற்றிருக்கக் காணலாம்.

இந்த மாறுபாடுகளைப் பின்வரும் விளக்கப்படத்தின் வாயிலாக எடுத்துக் காட்டுகிறோம்.



படம் 31.

மொத்த உற்பத்தி விளைவானது படிப்படியாக வளர்ந்து சென்று உச்சநிலையை அடைகையில் மூன்றாம்நிலை துவங்குகிறது. இறுதிநிலை விளைவு முதலில் உச்சத்தையடைந்து அதன்பின்

குறையத் துவங்கும். இதையடுத்து சராசரி விளைவு குறையத் துவங்குவதைக் காணலாம். சராசரி உற்பத்தி விளைவானது இறுதிநிலை விளைவினைவிட மிகுதியாக அமைகின்ற இரண்டவாது நிலையே பெரும்பாலும் விரும்பத்தக்க நிலையாகும்.

உற்பத்திக் காரணிக் கலப்பின் திறனை இவ்விதி நன்கு எடுத்துரைக்கிறது. மேலே குறிப்பிட்ட மூன்று நிலைகளும் உற்பத்தியில் எவ்வளவு திறனுடன் காரணிகள் கலக்கப்படுகின்றன என்பதை நன்கு காட்டுகின்றன. முதலாம் நிலையில். உழைப்பு அதிகரிக்கப்படும்போது சராசரி விளைவும் அதிகமாகிறது. இது உழைப்பாளனின் அதிகரிக்கும் திறமையைக் குறிக்கிறது. நிலத்தின் திறன் அதிகரிப்பதையும் இது குறிக்கும். எனவே, நிலம் உழைப்பு இரு காரணிகளும் திறமையாகக் கலக்கப்படும் நிலை விளங்கும். இரண்டாம் நிலையில், உழைப்பாளியின் சராசரி மற்றும் இறுதி நிலை உற்பத்திகள் குறைந்து செல்வதை வலியுறுத்தும். மொத்த உற்பத்தி அதிகரித்துச் செல்வதால், இறுதிநிலை விளைவானது நேர்க் கணியமாக (+) அமைகிறது. இங்கு உழைப்பாளித் திறன் குறைந்து செல்கிறது. ஆனால், மொத்த உற்பத்தி தொடர்ந்து அதிகமாகிறது. மூன்றும் நிலையில், உழைப்பின் சராசரி விளைவு மேலும் குறைய இறுதிநிலை விளைவு எதிர்க் கணியமாக (—), மொத்த உற்பத்தி படிப்படியாகக் குறைகிறது. இந்தக் கட்டத்தில், நிலம் மற்றும் உழைப்பாளி இரண்டு காரணிகளின் திறனும் மிகவும் குறைந்து விடுகின்றன. ∴ இரண்டாவது நிலையில், நிலம் உழைப்பாளி விகிதஅளவு மிகுந்த திறனுடையதாய் அமைகிறது.

விவசாய உற்பத்தியில். இவ்விதியானது மற்ற உற்பத்தி நிலைகளைவிடக் குறுகிய கால அளவிலேயே செயல்படத் துவங்கி விடுகிறது. அதாவது, இறுதிநிலை உற்பத்தியானது சீக்கிரமாகவே குறையத் துவங்கும். ஆனால், மற்றப் பொருட்களின் உற்பத்தியில், இது கால தாமதமாகவே துவங்கும். தொழில் நுட்பக் கூறுகளின் அமைப்புக்கேற்ப இது மாறுபடும். இதே விதியினை வேறொரு விகிதத்தில். ''மாறுபாட்டு விகித விதி'' என்றும் கூறுகிறோம். விவசாய மற்றும் தொழில்துறை உற்பத்தியில் இதேவிதி செயல் படுவது குறிப்பிடத்தக்கது. பின்வரும் நிபந்தனைகட்கு உட்பட்டே இவ்விதியானது செயல்படுகிறது.

பயிரிடும் முறைகளில் நுட்பமான புதுமைகள் அனுசரிக்கப் படுகையில், இவ்விதி, ஓரளவு கட்டுப்படுத்தப் பெறுகிறது. அறிவியல் முறைப்படி பயிர்களை மாற்றுதல், அதிகரித்த வளமுடைய விதைகளைப் பயன்படுத்துதல், அதிகப் பலன் அளிக்கும் உரங்களை

உபயோகித்தல், நவீன கருவிகளைப் பயன்படுத்துவது ஆகிய வற்றின் மூலமாக, விவசாயத்துறை அபிவிருத்தியால், வளர்ந்து செல் விளைவுகளைப் பெறலாம். ஆனாலும், ஏதேனும் ஒரு கட்டத்தில் குறைந்து செல் விளைவுகள் அமைவதைத் தவிர்க்க இயலாது.

அதிக வளமுடைய புது நிலப்பரப்பு பயன்படுத்தப்படும்போது ஒரு குறித்த காலத்திற்கு அதிக உழைப்பும், அதிக முதலும், அதிகரிக்கும் விளைவுகளையே அளிக்கும். துவக்கத்தில், குறைந்து செல் விளைவுகள் விதி இங்கு செயல்படுவதில்லை.

போதுமான அளவு முதலானது பயன்படுத்தப்படாத நிலையிலும் அதிக விகிதத்தில் விளைவு அமைவதைக் காணலாம். பொதுவாக, அறிவியல் முறைகளைப் பயன்படுத்துகையில், இந்த விதியானது செயல்படுவதைக் கட்டுப்படுத்தலாம்.

விவசாயத்துறையில் இவ்விதியானது தனித்திறனுடன் செயல்படுகிறது. இயற்கையில் நிகழும் மாற்றங்களுக்கேற்ப குறைந்து செல் விளைவுகள் அமையக் காண்கிறோம். விவசாய உற்பத்தி விளைவினை இயற்கையான காரணங்கள் மிகவும் பாதிப்ப தால் இவ்வாறு நிகழ்கிறது. பருவநிலை மாறுபாடுகள் காரணமாக எதிர்ப்பார்த்த அதிக விளைவு கிட்டாமல் போகலாம். எனவே, மனித சக்திக்கு மிகவும் வாய்ப்புள்ள நிலையில் வளர்ந்து செல் விளைவு அமைகிறதெனலாம். விவசாயத் துறைக்கு மட்டுமல்லாது, எல்லாவித துறைகட்கும் இவ்விதி பொருத்தமாய் அமைகிறதென்று கூறலாம். ஆனால், மற்ற துறைகளைவிட விவசாயத் துறையில் இந்நிலை வெகுவிரைவாக அமைந்து விடுகிறது.

பொதுவாக இந்த விதியானது காரணிகள் கலக்கப்படும் ஒரு நியதியினையே குறிக்கிறது. பொதுவாக, ஒரு மாறபடும் உற்பத்திக் காரணியானது மற்ற நிலையான காரணிகளுடன் இணைந்து பயன் படுத்தப் படுகையில் அந்த மாறுபாட்டுக் காரணியின் சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை விளைவுகள் குறைந்து செல்கின்றன. பென்ஹாம் கூறுவதாவது: "காரணிகளின் கலப்பினில், (தொகுப்பில்) ஒரு காரணியின் அளவு விகிதம் அதிகரிக்கப்படுகையில், ஒரு குறிப் பிட்ட நிலைக்குப்பின், அக்காரணியின் சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை விளைவுகள் தொடர்ந்து குறையத் துவங்குகின்றன."

வேலை நிறைவு (Full Employment) இருக்கின்றதென்ற அனுமானத்தின் அடிப்படையில், பொதுவாக, எப்பொழுது சமுதாயம் ஒவ்வொரு தொழிலிலும் பயன்படுத்தப் பெறும் ஒரு காரணியின் இறுதிநிலை உற்பத்தி மதிப்பைச் சமமாகக் கருது

கிறதோ, பல தொழில்களினிடையே காரணிகள் சிறந்த முறையில் பங்கீடு செய்யப்படும் தன்மையை அடைகின்றன.

இந்த விதியின் முக்கியத்துவம்

பல பொருளாதாரக் கொள்கைகள் குறைந்து செல்விளைவு விதியின் அடிப்படையில் தோற்றுவிக்கப்பட்டன. கெட்டதை வலியுறுத்தும் கொள்கையாகவே இது கருதப்பட்டது.

மால்தஸ் (Malthus) கண்ட மக்கட்தொகை கொள்கையானது. உணவு உற்பத்தி இந்த விதியினுக்குட்பட்டதென்ற கருத்தில் வரையப்பட்டது. மக்கட்தொகை வளர்ச்சி உணவு உற்பத்தி வளர்ச்சியைவிடப் பயங்கரமாக அதிகமாகும் என்பது இக்கொள்கை-

ரிக்கார்டோவின் வாரக் கோட்பாடு (Ricordian theory of rent) கூட இந்த அடிப்படையில் வரையறுக்கப்பட்டதாகும். அதன்படி, வளம் குன்றிய நிலப்பரப்புகள், குறைந்து செல்விதியைக் கருத்திற்கொண்டு பயிரிடப்பட வேண்டுமென்ற அனுமானத்தின் படி வார அளவு நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. பயிரிடப்படும் தன்மையின் இறுதிநிலை குறையக் குறைய வார அளவு அதிகரிக்கிறது. தொழிலின் சிறந்த அளவு இவ்விதி மூலம் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது.

பங்கீட்டு விதியில், இறுதிநிலை உற்பத்திக் கோட்பாட்டின்படி, (marginal productivity theory) மொத்த உற்பத்தியில் ஒவ்வொரு காரணியின் பங்கு அளவும் இம்முக்கிய விதியின் அடிப்படையில் மதிப்பிடப்படுகின்றன.

எனவே, பொருளாதார சிந்தனையில் இந்த விதி ஒரு தனி இடத்தினைப் பெற்றுத் திகழ்கிறது.

வளர்ந்து செல் விளைவு விதி (Law of Increasing Returns)

மாறுபடும் விகிதங்களின் (Variable Proportion) மற்றொரு பொதுவான விதி வளர்ந்து செல் விளைவு விதியாகும். அதிகப் படியான முதலீடு செய்வதன் விளைவாக ஒரு தொழில் நிறுவன மானது அதிகரித்த விகித அளவு உற்பத்திப் பெருக்கத்தினைக் காணும் நிலையில், இவ்விதியானது செயல்படுகிறது. அதாவது இறுதிநிலை உற்பத்தி அளவு அதிகரித்துச் செல்கிறது. அதாவது தொழில் விரிவாகும்பொழுது, உற்பத்திச் செலவு (இறுதிநிலை) குறைந்து செல்கிறது. இறுதிநிலைச் செலவானது, விலையைக் குறிப்பதெனில், உற்பத்தி அதிகரிக்கையில் பொருளின் குறையத்

துவங்குவதெனில், இவ்விதி செயல்படுகிறதென்று பொருளாகும். உற்பத்தி விகிதம் அதிகமாகும்பொழுது, உழைப்பு, பொறி ஆகியவற்றின் சிறப்பான பயன் நன்கு உபயோகமாகிறது. மற்ற வணிகச் சிக்கனங்களின் மூலம், உற்பத்திச் செலவு குறைய, விளைவு அதிகரிக்கின்றது. காரணிகள் தடையின்றிக் கிடைக்கும் நிலையில் உற்பத்தி விகித அளவு அதிகரித்துச் செல்லும். உற்பத்திக் காரணிகள் மிகவும் சரியான முறைப்படி கலந்து பயன்படுத்தப்படும் நிலையிலும் இவ்விதி செயல்படும். ஏதாவது காரணியாவது முழு அளவில் உபயோகிக்கப்படினும், இவ்விதி காணப்படும். உதாரணமாக, ஒரு பொறியின் முழுச் சக்தியினையும் பயன்படுத்துகையில், உற்பத்தி வீதமானது தொடர்ந்து அதிகரித்துச் செல்லக் காணலாம்.

நிலையான விளைவு விதி (Constant Returns)

சராசரிச்செலவு மாருத ஒன்ருக அமைந்திருப்பின், உழைப்பின் முதலும் அதிக அளவில் பயன்படுத்தப் படும்பொழுது, உற்பத்தியானது அதே விகிதத்தில் அதிகரித்தால், இந்த விதி செயல்படுவதெனக் கொள்கிரேம். சில நிறுவனங்களில், மேற்கண்ட இரண்டு விதிகளும் காணப்படவில்லை. எனில், இடை நிலையான இந்த விதி செயல்படுவதாக அறியலாம். இயற்கைக் காரணங்களால் மாறக்கூடிய தன்மை வாய்ந்த மூலப் பொருட்களை ஒரு நிறுவனம் பயன்படுத்துகையில், மனித சக்தி உட்பட்ட உற்பத்திச் செலவானது அதே விகிதத்தில் மாறுவதைக் காண்கிரேம். தொழில் விரிவாக்கப் படுகையில், சிலவகைச் செலவுகள் அதிகரித்தும், சிலவகைச் செலவுகள் குறைந்தும் உள்ள நிலையில் ஏற்படும் விளைவுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமநிலையாக, நிலையான விளைவு விதி செயல்படுகிறது. உச்ச கட்டத்தை (optimum) ஒரு நிறுவனமானது எப்பொழுது அடைகிறதோ அப்போது இந்த விதி அமுலாகும் எனலாம்.

இருமாறிகளைச் சார்ந்த ஒரு சார்பின் மொத்த வகையீடு காணல்

$z = f(x, y)$ என்ற ஒரு சார்பின் மொத்த வகையீடானது

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \triangle x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \triangle y$$ என்ருகும். இதில்,

$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ஆகியவை, z-ன் பகுதி வகைவேறுபாட்டுக் கெழுக்களாகும் $\triangle x$, $\triangle y$ என்பவை, தனித்த மாறிகளின் (x, y) என்ற மதிப்பிலிருந்து ஏதேனும் அதிகரிப்புகளைக் குறிக்கும். இதனை, சார்பற்ற வேறுபாடுகளாவன dx, dy இவற்றின் மூலமாக,

$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$ என்றும் குறிக்கலாம். இது சார்பின் மொத்த வகையீட்டு (total differential) மதிப்பாகும்.

y நிலையாக அமைந்து (Constant), x ஆனது dx என்ற அளவு மாறுபடுகையில்,

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x} dx \text{ என்றும்,}$$

x நிலையாக அமைகையில்,

$$dz = \frac{dz}{\partial y} dy$$

எனவும் பெறுகிறோம்.

இம்முறையிலும், வகை வேறுபாட்டு (techniques) விதிகள் பயன்படுவதைக் காணலாம்.

x, y ஆகியவை $f(x, y) = 0$ என்ற உட்படு சார்பின்படி தொடர்புற்றிருக்கும் நிலையில் (inplicit function), மொத்த வகையீடானது,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial x} dy$$

என்பதில் $dz = 0$ எனப் பிரதியிட,

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy = 0 \text{ என அமையும்.}$$

இது, வேறுபாட்டு அதிகரிப்புக்களான dx, dy இவற்றினிடையே, $f(x, y) = 0$ என்ற சார்புக்குத் தக்கபடி, உள்ள தொடர்பாகும்.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{fx}{fy} \text{ எனவும்,}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{fy}{fx} \text{ எனவும் பெறுகிறோம்.}$$

$$fx = \frac{\partial z}{\partial x}\ ; \quad fy = \frac{\partial z}{\partial y}\ .$$

இவை, x, y இவற்றைச் சார்ந்த சார்புகளாகும்.

உதாரணம்

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ என்ற உட்படுசார்பு y-யினை x-ஐச் சார்ந்த இரட்டை மதிப்புச் சார்பாகத் தரும்.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x - 1);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(y + 2).$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{fx}{fy} = -\frac{2(x-1)}{2(y+2)} = -\frac{(x-1)}{(y+2)}$$

நேரடியாக வகையிட,

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - 2\frac{d}{dx}(x) + 4 \cdot \frac{d}{dx}(y) = 0.$$

அதாவது $2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2 + 4\frac{dy}{dx} = 0.$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{y+2}$$

ஆகும்.

$f(x, y) = 0$ என்பதன் இரண்டாம்நிலை வகைவேறுபாடு

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{fy^3}(f_{xx} \cdot fy^2 - 2f_{xy} \cdot f_x \cdot fy + f_{yy} \cdot fx^2)$$ ஆகும்.

உற்பத்தியில் காரணிகளின் பதிலீடு (Substitution of factors in production)

மாறுபடும் இரு காரணிகளை (variable factors) கொண்ட $x = f(a, b)$ என்ற உற்பத்திச் சார்பானது, $f(a, b)$ = மாறிலி என்ற நிலையில் அமையும் சம ஆக்க அளவு வளைவுகளைத் தரும். இயல்பு நிலையில் (normal case), இவ் வளைவுகளில் ஒன்றுனது, (a, b) என்ற ஒவ்வொரு புள்ளியின் வழியாகவும் செல்லும். இவை ஒவ்வொன்றும் கீழ்நோக்கி சரிந்தும், ஆரம்பப் புள்ளியிலிருந்து குவிவாகவும் அமைந்திருக்கும்.

மேற்கண்ட உற்பத்திச் சார்பின் மொத்த வகையீடானது பின்வருமாறு :

இறுதிநிலை உற்பத்தித் திறன்கள் (காரணிகட்கு),

$$f_a = \frac{\partial x}{\partial a}; \quad f_b = \frac{\partial x}{\partial b} \text{ ஆகும்.}$$

(a, b) எனும் புள்ளி மூலமாகச் செல்லும் சம ஆக்க அளவு வளைவினில், da, ab ஆகிய காரணி அளவு அதிகரிப்புக்களிடையே உள்ள தொடர்பு

$$f_a \, da + f_b \, db = 0 \text{ என்றாகும்.}$$

$$(\therefore \quad f(a, b) = \text{மாறிலி, என்பது உட்படு சார்பு.})$$

இது (a, b)-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும். இத்தொடர்பிலிருந்து, (a, b) என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் சம ஆக்க அளவு வளைவின் தொடுகோட்டுச் சாய்வானது (tangent gradient)

$$\frac{db}{da} = -\frac{fa}{fb} \text{ என்பதாகும்.}$$

இது a-அச்சினைச் சார்ந்தது. இயல் நிலையிலும், O_{ab} என்ற சம தளத்தின் பொருத்தமான பரப்பிலும், இச் சாய்வானது எதிர்க் கணியமாகவும் (−), அதன் எண்சார் மதிப்பு 'இறுதிநிலைப் பதிலீட்டு வீதம்' (marginal rate of substitution) எனக் கூறப் படுகிறதெனவும் அறிகிறோம். அதாவது, X என்ற பொருளின் உற்பத்தியில், A என்ற காரணிக்குப் பதிலாகப் பயன்படுத்தப்படும் B காரணியின் இறுதிநிலைப் பதிலீட்டு வீதமாவது,

$$r = -\frac{db}{da} = \frac{f_a}{f_b}$$

என்பதாகும். r-ன் மதிப்பு, A, B காரணிகளின் தொகுப்பைப் பொறுத்து மாறுபடும். அதாவது, r-ன் மதிப்பானது, a, b இரண்டினையும் சார்ந்த சார்பாக அமைகிறது. A காரணியின் அளவு ஒரு சிறு அளவு குறைக்கப்படுகையில், மொத்த உற்பத்தி அளவினை மாற்றாதிருக்கத்தக்க நிலையில், உபயோகிக்கப்படும் B காரணியின் அதிகரித்த அளவினை r என்ற இந்த இறுதிநிலைப் பதிலீட்டு வீதமானது குறிக்கிறது.

இயல்பான நிலையில், சம ஆக்க அளவு வளைவுகள் அனைத்தும் ஆரம்பப் புள்ளிக்கு குவிவாக அமைவதால், ஒரு சம ஆக்க அளவு வளைவினில், b-ன் மதிப்பானது அதிகரிக்கையில் (a-ன் மதிப்பு குறையும் நிலையில்) r-ன் மதிப்பு அதிகரிக்க வேண்டும். எனவே

குவிவு நிபந்தனையானது அதிகரிக்கும். இறுதிநிலை பதிலீட்டு வீதத்தினைக் குறிப்பிடுகின்றது. இந்த உண்மை, தொடர்ந்து பதிலீடு செய்கையில், B காரணியினை A காரணிக்கு பதிலாகப் பயன் படுத்துவதானது மென்மேலும் கடினமாக அமைகிறது என்ற எடுகோளின் அடிப்படையில் நிறுவப்படுகின்றது. இதனை மேலும் விரிவாகக் கருதுவோம்.

இறுதிநிலைப் பதிலீட்டு வீதம் 'r' ஆனது எவ்வளவு வேகமாக அதிகரித்துச் செல்கிறதென அறிய 'பதிலீட்டு நெகிழ்ச்சிக் கெழு' வினை கருதுகிறோம். ஒரு சம ஆக்க அளவு வளைவினில், (a, b) எனும் மதிப்பிலிருந்து ஏற்படும் எந்த ஒரு மாறுபாட்டிற்கும் $d\left(\frac{b}{a}\right)$ என்பதானது A காரணி அளவுடன் ஒப்பிடுகையில் B-ன் அளவு அதிகரிப்பதை (அல்லது குறைவதை)க் குறிப்பிடுகிறது. இதேபோல், $dr = d\left(\frac{f_a}{f_b}\right)$ என்பது அதற்கு ஏற்ற இறுதிநிலைப் பதிலீட்டு வீதத்தின் அதிகரிப்பை (அல்லது குறைவை) காட்டுகிறது. இவ்வாறான, காரணி அளவு விகிதம், பதிலீட்டு வீதம் ஆகியவற்றின் வேறுபாட்டு விகிதங்களிடையே அமையும் விகிதத்தினை 'பதிலீட்டு நெகிழ்ச்சி' என்று கூறுகிறோம்.

கருதப்பட்ட காரணித் தொகுப்பில், A, B என்ற காரணிகளிடையே, பதிலீட்டு நெகிழ்ச்சிக் கெழு,

$$\sigma = \frac{\frac{a}{b} \cdot d\left(\frac{b}{a}\right)}{\frac{1}{r} \cdot dr}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு, இரு வேறுபாடுகளும் (a, b) வழியாகச் செல்லும் சம ஆக்க அளவு வளைவில் கருதப்படும் மாறுபாட்டினை ஒட்டியதாகும்.

விளக்கப்படத்தில், σ என்ற இக்கெழு மதிப்பானது, P என்ற ஒரு புள்ளி சம ஆக்க அளவு வளைவினில் நகர்ந்து செல்லுகையில் (O_{ab} என்ற சமதளப் பரப்பில்), OP என்னும் நேர் கோட்டின் சாய்வில் ஏற்படும் சார்புடை அதிகரிப்புக்கும், P என்னும் புள்ளியில் உள்ள சம ஆக்க அளவு வளைவின் தொடு கோட்டுச் சாய்வினில் நிகழும் சார்புடை அதிகரிப்பிற்கும் இடையில் உள்ள விகிதமாக அமைகின்றது.

σ கெழுவின் மதிப்பினை, r-ன் பகுதி வகை வேறுபட்டுக் கெழுக்களின் மூலமாக, அல்லது உற்பத்திச் சார்பினது பகுதி வகை வேறுபாட்டுக் கெழுக்களின் மூலமாகப் பின்வருமாறு பெறலாம்.

$$d\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{a \cdot db - b \cdot a_a}{a^2};$$

$$dr = \frac{\partial \gamma}{\partial a} \cdot da + \frac{\partial \gamma}{\partial b} \cdot db.$$

ஆனல், $db = \dfrac{-fa}{fb} \cdot da = -r \cdot da$

எனவே, $d\left(\dfrac{b}{a}\right) = -\dfrac{ar+b}{a^2} \cdot da;$

மேலும் $dr = -\left(r \cdot \dfrac{\partial \gamma}{\partial b} - \dfrac{\partial \gamma}{\partial a}\right) da.$

∴ இவற்றைப் பிரதியிட,

$$\sigma = \frac{r}{ab} \cdot \frac{ar+b}{r \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial b} - \frac{\partial \gamma}{\partial a}}$$

என்ருகும்.

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{fa}{fb}\right) \text{ என்பதையும்,}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{fa}{fb}\right) \text{ என்பதையும்,}$$

$f(a, b)$ சார்பின் முதலாம் மற்றும் இரண்டாம் நிலைப் பகுதி வகை வேறுபாட்டுக் கெழுக்களின் மூலம் மதிப்பிடுகையில்

$$\sigma = \frac{f_a f_b (a f_a + b \cdot f_b)}{ab\left[-(f_{aa} \cdot f_b^2 - 2 f_{ab} \cdot f_a \cdot f_b + f_{bb} \cdot f_a^2)\right]}$$

என்று பெறுகிருேம்.

இதன்மூலம், A காரணியினை B-க்கு பதிலிடுகையில், σ-ன் மதிப்பு மாறுவதில்லை எனக் காணலாம். எனவே, பதிலீட்டு நெகிழ்ச்சிக் கெழு (σ) வானது, இரு காரணிகளைப் பொறுத்து சமச்சீரானதாக அமைகிறது.

(a, b) என்ற புள்ளியில், சமஆக்க அளவு வளைவின், வளைவானது (curvature)

$$\frac{d^2 b}{da^2} = \frac{d}{da}\left(\frac{db}{da}\right) = -\frac{d}{da}(r)$$

$$= -\left[\frac{\partial r}{\partial a} + \frac{\partial r}{\partial b} \cdot \frac{db}{da}\right]$$

$$= r \cdot \frac{\partial r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial a}$$ ஆகும்.

எனவே, σ கெழுவானது $\frac{d^2 b}{da^2}$ மதிப்பின் தலைகீழ் மதிப்பின் (reciprocal) நேர் பெருக்கு மதிப்பாக (product) பெறப்படுகிறது. அதாவது, σ மதிப்பு நேர்க் கணியமாகவும் (+), சமஆக்க அளவு வளைகோட்டு வளைவின் எதிரிடை விகிதத்தில் மாறுவதாகவும், அமைகிறது. σ-ன் மதிப்பு பெரிதாக இருப்பின், சமஆக்க அளவு வளைவானது தாழ்ந்து சரிந்ததாய் அமையும் (flatter). A காரணிக்கு B-யினை பதிலிடுகையில், இறுதிநிலை பதிலீட்டு வீதமானது மெதுவாக அதிகரித்துச் செல்லும். σ கெழுவின் எண்சார் மதிப்பானது, B காரணியினை A-க்கு பதிலிடுவதன் மூலமாக உற்பத்தி அளவு மாறுபடாது அமைந்திருக்கும் நிலையினைக் காட்டும் கோலாக (scale) அமைகிறது. இதன் மதிப்பின் இரு எல்லை வரையறை நிலைகள் காணப்படும். அவையாவன :

A, B காரணிகள் சிறந்த பதிலீட்டு காரணிகளாய் அமையும் நிலையில் (perfect substitutes) A-ன் அளவானது குறைக்கப்படும் விகிதத்தில் B-ன் அளவு அதிகரிப்பதன் மூலமாக உற்பத்தி அளவு மாருததாய் அமைகையில், சமஆக்க அளவு வளைவானது நேர் கோட்டின் வடிவில் இருக்கும். $\frac{d^2 b}{da^2} = 0$ என்றும், σ மதிப்பு முடிவில் (∞) ஆகவும் இந்நிலையில் காணப்படும்.

மற்றொரு நிலையானது, A, B காரணிகள் பதிலீடு செய்வதற்கு முற்றிலும் இயலாத நிலையில் அமைந்திருப்பதைக் குறிக்கும். அவை இரண்டு ஒரு மாருத விகிதத்தில் தேவைப்படுவதைக் காணலாம். அப்பொழுது, இந்தக் குறிப்பிட்ட விகித அளவி னின்று ஏதோ ஒரு காரணியின் அளவு அதிகரிக்கப்படினும், உற்பத்தி அளவு மாறுபடாதிருக்கும். கருதப்பட்ட புள்ளியில், சமஆக்க அளவு வளைவானது ஒரு செங்கோணத்தைப் பெற்

திருக்கும். $\frac{d^2b}{da^2}$ மதிப்பு முடிவிலியாகவும், $\sigma = 0$ ஆகவும் அமையும். எனவே, σ கெழுவின் மதிப்பானது பூஜ்யத்திலிருந்து முடிவிலி வரையில் அதிகரிக்கையில் காரணிகளினிடையே பதிலீடானது மிகவும் எளிதானதாக அமைகிறது.

எனவே, பதிலீட்டு நெகிழ்ச்சிக்கெழு (σ) வானது, காரணிகளின் ஒரு தொகுப்பிலிருந்து மற்றொன்றிற்கு மாறுபடும் தன்மைத்தாகவும், காரணி அளவுகள் மற்றும் உற்பத்தி விளைவு இவை மதிப்பிடலாம். அலகுகளுடன் தொடர்பற்றும் (units of measurement), காரணிகளிடையே உள்ள சமச்சீரான தொடர்பாகவும், எல்லா இயல்பான காரணித் தொகுப்புக்களுக்கும் நேர்க் கணிய (+) மதிப்பாகவும், ஒரு காரணியானது மற்றொன்றிற்கு பதிலிடப்படும் எளிமை நிலைக்கேற்ப பூச்சியத்திலிருந்து முடிவிலி மதிப்புவரை மாறுவதாகவும் அமைந்திருக்கக் காணலாம். இவை அனைத்தும் σ-ன் சிறப்பான இயல்புகளாக அமைகின்றன.

இக் கருத்தில் குறிப்பான நிலையில் (special case) உற்பத்திச் சார்பானது நேர்கோட்டு ஓரினத் தன்மை (linear homogeneous) உடையதாக நிலையான உற்பத்தி விளைவு விகித விதியின்படி) அமைந்திருக்கையில், σ மதிப்பு கணக்கிடுதலுக்கு எளிதாக அமையும். கணித முறைப்படி இது மதிப்பிடப்படுவதானது :

இந்நிலையில்,

$$f_{aa} = -\frac{b}{a} f_{ab}\ ;\quad f_{bb} = -\frac{a}{b} f_{ab}$$ என அறிவோம்.

மேலும், $-(f_{aa} \cdot f_b^2 - 2f_{ab} \cdot f_a \cdot f_b + f_{bb} \cdot f_a^2)$

$$= \frac{f_{ab}}{ab}[a^2 f_a^2 + 2f_a \cdot f_b \cdot ab + b^2 f_b^2]$$

$$= \frac{f_{ab}}{ab}[a f_a + b f_b]^2$$

$$\therefore \quad \sigma = \frac{f_a \cdot f_b}{(a f_a + b f_b) f_{ab}}$$

$$= \frac{f_a \cdot f_b}{x \cdot f_{ab}}$$

$[\because \ a f_a + b f_b = x]$.

இதனை $\sigma = \dfrac{\dfrac{\partial x}{\partial a} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial b}}{x \cdot \dfrac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial b}}$ என்றும் எழுதலாம்.

உதாரணம் (1)

$x = Aa^{\alpha} \cdot b^{1-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ என்ற உற்பத்திச் சார்பின் σ மதிப்பைக் காண்க.

$$x = Aa^{\alpha} \cdot b^{1-\alpha}$$

$$\therefore \quad f_a = \frac{\partial}{\partial a}\left(Aa^{\alpha} \cdot b^{1-\alpha}\right)$$

$$= A\alpha \cdot a^{\alpha-1} \cdot b^{1-\alpha};$$

$$f_b = \frac{\partial}{\partial b}\left(Aa^{\alpha} \cdot b^{1-\alpha}\right)$$

$$= A \cdot a^{\alpha} \cdot (1-\alpha) \cdot b^{-\alpha}.$$

$\therefore$ இறுதிநிலை பதிலீட்டு வீதம் :

$$\gamma = \frac{\partial x}{\partial a} \Big/ \frac{\partial x}{\partial b}$$

$$= \frac{A \cdot \alpha \cdot a^{\alpha-1} \cdot b^{1-\alpha}}{Aa^{\alpha} \cdot (1-\alpha)\, b^{-\alpha}}$$

$$= \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{b}{a}.$$

மேலும், $f_{ab} = \dfrac{\partial}{\partial a}\left(\dfrac{\partial x}{\partial b}\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial a}\left(A \cdot a^{\alpha} \cdot (1-\alpha) \cdot b^{-\alpha}\right)$$

$$= A \cdot \alpha \cdot a^{\alpha-1} \cdot (1-\alpha)\, b^{-\alpha}$$

$$\therefore \quad \sigma = \frac{f_a \cdot f_b}{x \cdot f_{ab}}$$

$$= \frac{(A\alpha \cdot a^{\alpha-1} \cdot b^{1-\alpha})(A \cdot a^{\alpha} \cdot (1-\alpha) \cdot b^{-\alpha})}{(A\, a^{\alpha} \cdot b^{1-\alpha})(A \cdot \alpha \cdot a^{\alpha-1} \cdot (1-\alpha)\, b^{-\alpha})}$$

$$= 1.$$

∴ இங்கு, எல்லாப் புள்ளிகட்கும், பதிலீட்டு நெகிழ்ச்சிக்கெழு மதிப்பு '1' என்று அமையும்.

உதாரணம் 2

$x = \sqrt{2Hab - Aa^2 - Bb^2}$ என்ற நேர்கோட்டு ஓரின உற்பத்திச் சார்பின் பதிலீட்டு நெகிழ்ச்சிக் கெழுவினைக் கண்டறிக.

$$x : \sqrt{2Hab - Aa^2 - Bb^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left[\sqrt{2Hab - Aa^2 - Bb^2}\right]$$

$$= \frac{2(Hb - Aa)}{2\sqrt{2Hab - Aa^2 - Bb^2}}$$

$$\therefore \quad f_a = \frac{Hb - Aa}{\sqrt{2\,Hab - Aa^2 - Bb^2}}$$

இதேபோல்,

$$f_b = \frac{\partial}{\partial b}\left[\sqrt{2\,Hab - Aa^2 - Bb^2}\right]$$

$$= \frac{Ha - Hb}{\sqrt{2\,Hab - Aa^2 - Bb^2}}.$$

$$\therefore \quad \gamma = \frac{f_a}{f_b} = \frac{Hb - Aa}{Ha - Bb}.$$

... ...

இது (a, b) இவற்றின் விகிதத்துக்கு ஏற்ப மாறுபடும் தன்மை உடையது.

$$\left[\therefore \quad \gamma = \frac{H \cdot \frac{b}{a} - A}{H - B \cdot \frac{b}{a}} = \varphi\left(\frac{b}{a}\right). \quad\right]$$

மேலும்,

$$f_{ab} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{Ha - Bb}{\sqrt{2\,Hab - Aa^2 - Bb^2}}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2\,Hab - Aa^2 - Bb^2} \cdot (H) - \dfrac{(Ha - Bb)(Hb - Aa)}{\sqrt{2\,Hab - Aa^2 - Bb^2}}}{(\sqrt{2\,Hab - Aa^2 - Bb^2})^2}$$

$$\therefore \quad f_{ab} = \frac{(2\,Hab - Aa^2 - Bb^2) - (Ha - Bb)(Hb - Aa)}{(2\,Hab - Aa^2 - Bb^2)^{\frac{3}{2}}}$$

எனவே,

$$\sigma = \frac{f_a\, f_b}{x \cdot f_{ab}}$$

$$\therefore \ \sigma = \frac{(Hb - Aa)(Ha - Bb) \,/\, (2\,Hab - Aa^2 - Bb^2)}{(2\,Hab - Aa^2 - Bb^2) - (Ha - Bb)(Hb - Aa) / (2Hab - Aa^2 - Bb^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{Hx^2}{(H^2 - AB)\,ab} - 1$$

என்று காணலாம்.

பயிற்சி

1. $x = \dfrac{2\,Hab - Aa^2 - Bb^2}{Ca + Db}$ என்ற உற்பத்திச் சார்பின் இறுதிநிலை பதிலீட்டு வீத மதிப்பைக் காண். σ கெழுவையும் மதிப்பிடுக.

2. கீழ்க்கண்ட உற்பத்திச் சார்புகளின் இறுதிநிலை பதிலீட்டு வீதம், மற்றும் பதிலீட்டு நெகிழ்ச்சி கெழு ஆகியவற்றினை மதிப்பிடுக :

(i) $x = \sqrt{2(12ab - 5a^2 - 4b^2}$;

(ii) $x = \frac{40}{a + b}(12ab - 5a^2 - 4b^2)$;

(iii) $x = \sqrt{5ab - 2a^2 - 2b^2}$;

(iv) $x = a^{0.75}\ b^{0.25}$;

(v) $x = a^{2.13}\ b^{0.34}$.

3. $x = f(a, b)$ என்ற உற்பத்திச் சார்பானது, நேர்கோட்டு ஓரின வடிவில் அமைந்திருக்கையில், இதில் கண்ட இரு காரணிகளின் இடையில் நிகழும் இறுதிநிலை பதிலீட்டு வீதமானது காரணிகள் b, a ஆகியவற்றின் விகித அளவினை சார்ந்து அமைவதென நிரூபிக்கவும்.

கீழ்க்கண்ட சார்புகட்கும் இந்நிலை அமைவதென நிறுவுக :

(i) $x = \sqrt{2Hab - Aa^2 - Bb^2}$

(ii) $x = \dfrac{2Hab - Aa^2 - Bb^2}{Ca + Db}$

3. மேற் குறிப்பிடப்பட்ட தன்மையானது, இரண்டாம்படி ஓரினச் சார்பிற்கும் (quadratic homogeneous) பொருந்துவதெனக் காட்டு. $x = 2Hab - Aa^2 - Bb^2$ என்ற உற்பத்திச் சார்பிற்கு இத்தன்மை அமைவதை நிரூபிக்க. இத் தன்மையானது $x = Aa^{\alpha} \cdot b^{\beta}$ என்ற பொதுச் சார்பிற்குப் பொருந்துமா என ஆராய்க.

4. காரணிகள் எந்த அளவில் கலந்து பயன்படினும், $x = Aa^{\alpha} \cdot b^{\beta}$ என்ற உற்பத்திச் சார்பில், $\sigma = 1$ என்றே அமைந்திருப்பதை நிரூபிக்க.

5. b ஏக்கர் நிலப்பரப்பில், a உழைப்பாளிகளைப் பயன்படுத்தி, மரங்கள் நடப்படுவதாகக் கொண்டால், t ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அறுக்கப்படும் மரத்தின் மொத்த அளவானது $x = f(a, b, t)$ என்ற, மூன்று மாறிகளைச் சார்ந்த, சார்பாக அமையும். இதில்

$\dfrac{\partial x}{\partial a}$, $\dfrac{\partial x}{\partial b}$, $\dfrac{\partial x}{\partial t}$ என்பவற்றினைப் பொருளுடன் விளக்குக.

$x = A \cdot a^{\alpha} \cdot b^{1-\alpha} \cdot t^{\beta}$ என்று கொடுக்கப்பட்டால், (α, β நேர்க்கணிய பின்னங்கள்) ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்குப் (t) பின் நிலத்திற்கும், உழைப்பிற்கும் நிலையான உற்பத்தி அளவு விளை வதாகக் காட்டுக. மேலும் கொடுக்கப்பட்ட நிலம் மற்றும் உழைப்பு அளவுகளில், பெறப்படும் மரத்தின் அளவு காலப் போக்கில் குறைந்த விகிதத்தில் அதிகரித்துச் செல்வதையும் காட்டுக.

உற்பத்தித் திறன் நெகிழ்ச்சிக் கெழு (Elasticity of Productivity) :

கொடுக்கப்படும் நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில், உற்பத்தி விளைவின் மூன்று வகையான நிலைகளை (i) குறைந்து செல் விளைவு விதி ; (ii) வளர்ந்து செல்விளைவு விதி & (iii) நிலையான விளைவு விதி என்று பகுத்து ஆய்ந்து கண்டறிந்தோம். அளவின் அடிப் படையிலான உற்பத்தி விளைவு விகித மாறுபாடானது (returns to scale), பொதுவான உற்பத்தி விளைவு மாறுபாட்டிலிருந்து வேறு பட்ட ஒரு கருத்தாகும். குறிப்பாக, இங்கு எல்லா உற்பத்திக் காரணிகளுமே ஒரே விகிதத்தில் ஒரே காலத்தில், அதிகரிக்கப் படவோ அல்லது குறைக்கப்படவோ செய்கையில் உற்பத்தி அளவு எந்த விகிதத்தில் மாறுபடும் என்று அறிவதே நமது நோக்க மாகும். அதாவது அளவின் அடிப்படையில் அமையும் உற்பத்தி விளைவு விகித நியதியானது எல்லா முதற் பொருட்களும் (inputs) இரு மடங்கு அல்லது மும்மடங்கு அல்லது பொதுவாக λ என்ற மடங்கு அதிகரிக்கையில், இதன் மூலமாக ஏற்படும் உற்பத்தி விகிதம் எந்த விகிதத்தில் மாறுபடும் என்பதனைக் கருதுகிறது. உற்பத்தி அளவு கோல் (scale of production) எத் தன்மைத்தாய் இருப்பினும், உற்பத்திக் காரணிகள் பயன்படுத்தப்படும் விகித மானது ஒரே மாதிரி இருக்கத் தக்க நிலையில், சமமான அளவிற்கு அவை அதிகரிக்கவோ அல்லது குறைக்கவோ பட வேண்டும்.

பொதுவாக, எல்லா உற்பத்திக் காரணி அளவுகளும் இரு மடங்காக ஆக்கப்படுகையில், அதன் விளைவாக ஏற்படும் உற்பத்தி அளவும் இருமடங்காகும் என எதிர்பார்க்கப் படலாம். அதாவது, காரணிகளை λ மடங்கு அதிகமாகப் பயன்படுவதன் மூலமாக, λ மடங்கு அதிக அளவு உற்பத்தி விளைவினை எதிர் பார்க்கலாம். ஆனால் உண்மையில் இது நிகழ்வது எளிதல்ல. காரணி விகித அளவினுக்கேற்ப உற்பத்தி விளைவானது அதிகரிக் கவோ, குறையவோ செய்வதில்லை. முன்பே கண்டது போல, விகித அளவானது அதிகரிக்கையில் (அதாவது, எல்லாக் காரணி களும் ஒரே விகிதத்தில் அதிகரிக்கப்படின்), இறுதிநிலை விளைவானது முதலில் ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லை வரையில் படிப்படியாக வளர்ந்து

சென்று, அதன்பின் விகித அளவு மேலும் அதிகரிக்கும் நிலையில் மாருத நிலையான அளவாக இருந்து, அதன் பின்னர் மேலும் மேலும் அதிகரிக்கும் விகித அளவுகட்கு படிப்படியாக குறைந்து செல்கிறதெனக் காணலாம்.

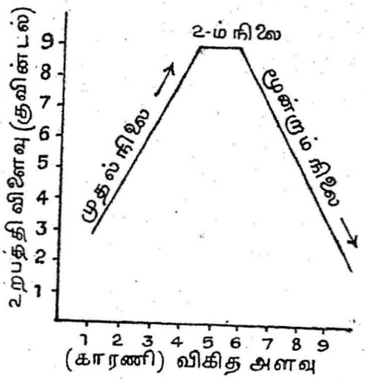
∴ இறுதி நிலை உற்பத்தி விளைவு மாறுபாட்டின் மூன்று நிலைகளைக் காண்கிறோம். பின்வரும் பட்டியலைக் கருதுக.

விகித அளவு விளைவுகள்

எண்	காரணிகளின் விகித அளவு	மொத்த உற்பத்தி (குவிண்டல்)	இறுதி நிலை விளைவு (குவிண்டல்)	
1	1 தொழிலாளி + 4 ஏக்கர் நிலம்	3	3	முதல் நிலை
2	2 ,, + 8 ,,	8	5	
3	3 ,, + 12 ,,	14	6	
4	4 ,, + 16 ,,	22	8	
5	5 ,, + 20 ,,	32	10	2-ம் நிலை
6	6 ,, + 24 ,,	32	10	
7	7 ,, + 28 ,,	40	8	3-ம் நிலை
8	8 ,, + 32 ,,	45	5	
9	9 ,, + 36 ,,	48	3	

முதல் நிலையில், காரணிகளின் விகித அதிகரிப்பினைவிட, உற்பத்தி விளைவு விகிதம் அதிகமாக உள்ளது. உதாரணமாக, நிலமும், உழைப்பும் இரட்டிப்பாகும் பொழுது, மொத்த உற்பத்தி 6 குவிண்டலை விட அதிக அளவு உள்ளது. இது, இரு மடங்கை விட அதிகமாகும். இங்கு, உற்பத்தி விளைவு விகிதம் வளர்ந்து செல்கிறது. காரணிகளின் விகிதமானது மேலும் அதிகரிக்கப் படுகையில், ஒரு குறிப்பிட்ட கட்டம்வரை இறுதிநிலை விளைவு நிலையானதாக (constant) உள்ளது. அதன் பின்னர், மூன்றும் நிலையில், உற்பத்தி விளைவு குறைந்து செல்லத் துவங்குகிறது. கடைசியில் (9-வது அளவில்), 3 குவிண்டல் உற்பத்தி விளைவே அமையக் காண்கிறோம்.

உற்பத்தி விளைவின் விகிதமானது மேற்கண்ட மூன்று வகைகளில் மாறுபடுவதன் காரணமாவது: முதற்கட்டத்தில், உற்பத்தி விளைவு விகிதம் அதிகரிக்கையில், உழைப்புப் பாகுபாடு (division of labour) விரிவான அளவில் கையாளப் படலாம். உழைப்பும், நிலப்பரப்பும் இரு மடங்காக பயன்படுத்தப் படுகையில், உழைப்பு பாகுபாடு மிக விரிவாக கையாள வாய்ப்பு ஏற்படுவதால், மொத்த உற்பத்தியானது இரு மடங்கினுக்கு அதிகமாகவே உயரும். ஆனால் இது ஒரு குறிப்பிட்ட நிலைவரையில்தான் இயலும். அந்த நிலைக்குப் பின்னர், இறுதிநிலை விளைவு வளர்வது தடைப்பட்டு, உற்பத்தி விகித அளவு ஒரு சில விகித மாறுபாடுகட்கு மாறுமல் அமைந்து அதன் பின் தொடர்ந்து படிப்படியாகக் குறைந்து செல்கிறது. எனவே, உற்பத்தி விளைவு விகித மாறுபாடுகள், உழைப்புப் பாகுபாட்டு நிலையினைப் பொறுத்து அமையும். மேலும் இதனைத் தனித் தன்மையின் (specialization) அடிப்படையிலும் கருதலாம்.



படம் 32.

நடைமுறையில், உற்பத்தி விளைவு விகித அளவினை ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லைக்குப்பின் அதிகரிக்க இயலுவதில்லை. உற்பத்திக் காரணிகளின் விகித அதிகரிப்பானது, எல்லாக் காரணிகளும் எந்த விகிதத்திலேனும் மாற்றப்படலாம் என்பதை குறிக்கும். நடைமுறையில் இது இயலாது என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. ஏனெனில், நிலம், உழைப்பு, முதல் ஆகியவற்றின் விகித அளவினை எப்படி மாற்றி அமைத்தபோதிலும், தொழில் முயல்வோன் ஒருவனுகவே இருக்கிருன். எனினும் தொழில் முயற்சி (organization) மட்டும் மாறுவதில்லை. ஆகவே, உற்பத்தி அளவானது அதிகரிக்க வேண்டுமெனில், காரணிகளின் விகித அளவு மாற்றப்படல் வேண்டும் என்பது புலப்படும்.

உற்பத்தித் திறன் நெகிழ்ச்சி

மேலே கருதப்பட்ட உற்பத்தி விளைவு விகித மாறுபாட்டினை (return to scale), பின்வரும் நெகிழ்ச்சிக் கெழு (elasticity coefficient)வின் மூலம், கணிதக் கோட்பாட்டினை கொண்டு நன்கு விளக்க இயலும்:

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில், ஒரு தொழில் நிறுவனமானது (firm) தனது உற்பத்தி அளவினைப் பல உற்பத்திக் காரணிகளைப் பயன்படுத்தி நிர்ணயம் செய்கிறது எல்லாக் காரணிகளுமே, ஒரே நிலையான விகிதத்தில் பயன்படுத்தப் படுவதெனக் கொள்வோம். அப்பொழுது, X என்ற பொருளின் உற்பத்தி அளவு x-ஆனது, இக்காரணிகள் அதிகரிக்கப்படும் (அல்லது குறைக்கப்படும்) λ என்ற விகித அளவினை முற்றிலும் சார்ந்ததாக அமைந்திருக்கும். விகித அளவானது அதிகரிக்கப் படுகையில், $\lambda > 1$ என்றும், குறைக்கப்படுகையில் $\lambda < 1$ என்று அமைந்திருப்பதைக் காண்கிறோம். எனவே, உற்பத்தி அளவு x-என்பதை, λ விகித அளவினைச் சார்ந்த ஒரு தொடர் சார்பாகக் கொள்வது சாலப் பொருந்தும். அந்த நிலையில், உற்பத்தித்திறன் நெகிழ்ச்சிக் கெழுவானது,

$$\epsilon = \frac{\lambda}{x} \cdot \frac{dx}{d\lambda} = \frac{d(\log x)}{d(\log \lambda)}$$

என வரையறுக்கப் படுகிறது. 'ϵ' என்பதை 'எப்ஸிலான்' என்று கூறுகிறோம். (மடக்கை வகை வேறுபாட்டுக் குணகம் பயன் படுத்தப்பட்டது.)

மேற்கண்ட வரையறையில், $\frac{dx}{d\lambda}$ என்பது, λ விகித அளவு மாறுபடுவதற்கு ஏற்ப. x உற்பத்தி அளவு விகிதம் மாறுபடும் வீதத்தை (rate) குறிப்பிடுகின்றது. இக்கெழு மதிப்பிலிருந்து பின்வரும் மூன்று நிலைகளை, உற்பத்தி விளைவு விகிதக் கோட்பாடு களாகப் பெறலாம் (laws of returns to scale) :

(1) $\epsilon > 1$, அதாவது ϵ மதிப்பு ஒன்றைவிட அதிகமாக இருக்கையில், (விகித அடிப்படையில்) வளர்ந்து செல் விளைவுகள் (increasing returns to scale) அமைந்திருப்பதைக் காணலாம். இந்நிலையில், எல்லாக் காரணிகளும் ஒரு சிறு விகிதத்தில் அதிகரிக்கப்படுகையில், உற்பத்தி விளைவு அதைவிட அதிகமான விகித அளவில் அதிகரிக்கும். ∴ உற்பத்தி விளைவு வளர்ந்து செல்வதன் காரணமாக, இறுதிநிலை விளைவும் படிப்படியாக வளர்கிறது.

(2) மேற்கூறிய நிலைக்கு முற்றிலும் எதிராக அமைவது, $\epsilon < 1$ என்றும் இந்நிலையாகும். இங்கு, காரணிகளனைத்தும் அதிகரிக்கப்படும் விகித அளவைவிடக் குறைவான விகிதத்தில் உற்பத்தி விளைவு அதிகரிக்கும். ∴ குறைந்து செல் விளைவு விதி

அமையப்பெறுவதால் (laws of diminishing returns to scale), இறுதிநிலை உற்பத்தி விளைவு குறைந்து செல்கின்றது.

(3) முதலிரண்டு நிலைகட்கும் இடைப்பட்ட நிலையில், $\epsilon = 1$ என அமைவதால், நிலையான உற்பத்தி விளைவு விதி செயல்படுவதாகக் கூறுகிறோம். (law of constant returns to scale) காரணிகள் மாறுபடும் விகித அளவும், உற்பத்தி விளைவு மாறுபடும் விகிதமும் சமமாக அமைகின்றன.

இயல்பான நிலையில் (normal case), λ-ன் மதிப்பானது அதிகரிக்கப்படுகையில், உற்பத்தி விளைவு படிப்படியாகக் குறைந்து செல்வதை, அதாவது ϵ-ன் மதிப்பு குறைந்து கொண்டே வருவதைக் குறிப்பிடலாம்.

மேற் குறிப்பிட்ட உற்பத்தித் திறன் நெகிழ்ச்சிக் கெழுவான ϵ-ன் தலைகீழ் மதிப்பு $\frac{1}{\epsilon}$ என்பது, ஏற்கெனவே கருதப்பட்ட உற்பத்திச் செலவு நெகிழ்ச்சிக்கெழுவான κ (கப்பா) மதிப்பை ஒத்ததாக அமைந்திருக்கக் காணலாம். அதாவது, ϵ என்ற கெழுவானது உற்பத்திச் செலவு நெகிழ்ச்சியினை (உற்பத்தி அளவினைச் சார்ந்ததாக) மதிப்பிடுகிறது. உற்பத்திச் செலவானது, பணத்தின் மூலம் கொடுக்கப்படாது, காரணிகள் பயன்படுத்தப்படும் அளவினைச் சார்ந்தாகத் தரப்படுகிறது. அதாவது, உற்பத்தி (மொத்தச்) செலவுச் சார்பினை,

$$\pi = F(x) : F\{ f(a, b) \}$$

என்று குறிக்கிறோம். ஆனால், உற்பத்திக் காரணிகள் நிலையான விகிதத்தில் பயன்படுத்தப்படும் நிலையில், ϵ-ன் மதிப்பானது ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லைக்குள் அமைகிறது. ஆனால், κ-ன் மதிப்பு இவ்வாறு அமைவதில்லை.

மேலும் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆக்க அளவு (output) $x = a$, என்பதில், உற்பத்தித் திறன் நெகிழ்ச்சி $\epsilon = 1$ என்று அமைவது திண்ணமென உறுதியாகக் கூறுகிறோம். உற்பத்திச் செலவு குறைந்து செல்கையில் ($\kappa < 1$), மொத்த உற்பத்தி விளைவு அதிகரிக்கிறது ($\epsilon \therefore 1$). இதேபோல், உற்பத்திச் செலவு தொடர்ந்து அதிகரித்துச் செல்லுகையில், உற்பத்தி அளவானது குறைந்து செல்லும் நிலை ஏற்கெனவே கருதப்பட்டது. அதாவது $\kappa > 1$ என்றிருக்கும் நிலையில், $\epsilon < 1$ என அமையும். உற்பத்தியியலில் இவ் விதிகள் முக்கிய இடம் வகிக்கின்றன.

11. வருவாயும் செலவும்

(Revenue & Cost)

மொத்த வருவாய், விளிம்பு வருவாய், சராசரி வருவாய் (Total Revenue, Marginal Revenue, Average Revenue)

ஒரு பண்டத்தின் தேவைப்பட்ட அளவு x என்றும், அதன் ஒரு அலகின் விலை p என்றும் கொண்டால், தேவைச் சமன்பாடு $p = f(x)$ என்றும் எழுதினோம். இனி மொத்த வருவாய் R என்பது கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகின்றது.

$$R = xp = x \cdot f(x)$$
$$= R(x).$$

சராசரி வருவாய் $= \dfrac{R}{x} = p$ ஆகும்.

விளிம்பு வருவாய் $\dfrac{dR}{dx} = \dfrac{d}{dx}\,[x\,f(x)].$

$R(x)$ சார்பலனின் ஒரு வரைபடமே, மொத்த வருவாய் வளைகோடு ஆகும்.

$R' = \dfrac{dR}{dx}$ சார்பலனின் வரைபடம், சராசரி வருவாய் வளைகோடு ஆகும்.

$x = 0$ என்றாலும் $p = 0$ என்றாலும்

$R = 0$ ஆகிறது.

x, p மதிப்புகள் நேர்மறை மதிப்புகள் ஆகும்.

இப்போது R மொத்த வருவாயை, p-ன் சார்பலனாகவும் எழுதலாம்.

$R = px = p.\ g(p) = R(p).$

p என்பதைக் குறித்த விளிம்பு வருவாய் $= \frac{dR}{dx}$.

x-ன் வாயிலாக, p-க்கு தீர்வு காணமுடியாத சமயத்தில்,

$\frac{dR}{dp}$ -ஐக் கண்டுபிடித்து இதன் மூலம்

$\frac{dR}{dx} = \frac{dR/dp}{dx/dp}$ என்ற சமன்பாட்டின்மூலம் $\frac{dR}{dx}$ -ஐக் கணக்கிடலாம்.

மாதிரி : தேவை நியதி $3x + 2p = 9$ என்றால்

$$p = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}x$$

மொத்த வருவாய் $R = x \cdot p$

$$= x.\left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}x\right)$$

$$= \frac{9}{2}x - \frac{3}{2}x^2.$$

விளிம்பு வருவாய் $\frac{dR}{dx} = \frac{9}{2} = \frac{3}{2} \cdot 2x$

$$= \frac{9}{2} - 3x.$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -3 < 0.$$

எனவே R சார்பலன் ஒரு உச்ச மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்.

$\frac{dR}{dx} = 0$ என்றால், $\frac{9}{2} - 3x = 0$. $3x = \frac{9}{2}$ $x = \frac{9}{6} = 1{\cdot}5$

$x = \frac{3}{2}$ என்ற புள்ளியில் $R'' < 0$.

எனவே தான் $x = \frac{3}{2}$ என்ற புள்ளியில் காணப்படும் உச்ச வருவாய்

மொத்த வருவாயின் உச்ச மதிப்பு $= [R(x)]_{x = \frac{3}{2}}$

$$= \left[\frac{9}{2}x - \frac{3}{2}x^2\right]_{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4}$$

$$= \frac{54 - 27}{8}$$

$$= \frac{27}{8}$$

இப்போது மொத்த வருவாய், சராசரி வருவாய், விளிம்பு வருவாய் வளைகோடுகளை வரைவோம்.

மொத்த வருவாய் : $R = \frac{9}{2} x - \frac{3}{2} x^2$

$x = 0$ என்றால் $R = 0$

$x = 2$ என்றால் $R = 3$

$x = \frac{3}{2}$ என்றால் $R = \frac{27}{8} = 3{\cdot}375$

$x = 3$ என்றால் $R = 0.$

சராசரி வருவாய் : $p = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} x$

$p = 0$ என்றால் $x = 3$

$x = 0$ என்றால் $p = \frac{9}{2} = 4{\cdot}5$

விளிம்பு வருவாய் : $R' = \frac{dR}{dx} = \frac{9}{2} - 3x$

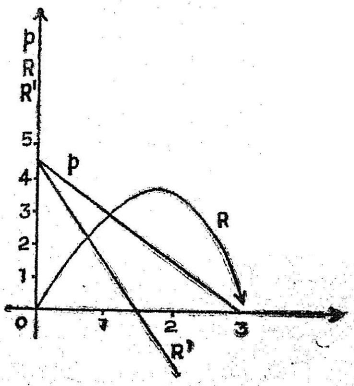
$x = 0$ என்றால் $R' = \frac{9}{2}$

$x = 1$ என்றால் $R' = \frac{3}{2}$

$x = 1{\cdot}5 = \frac{3}{2}$ என்றால் $R' = 0$

இங்கு புள்ளிகளில் மூன்று வளைகோடுகளையும் ஒரே வரைபடத்தில் வரைகிறோம்.

இங்கு
p = சராசரி வருவாய் கோடு
R' = விளிம்பு வருவாய் கோடு
R = மொத்த வருவாய் வளைகோடு



படம் 33.

மாதிரி

தேவை நியதி $x = 9 - p^2$ என்றால்

$$R = \text{மொத்த வருவாய்} = xp = 9p - p^3.$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dR}{dp} \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dR}{dp} = 9 - 3p^2.$$

$$\frac{dx}{dp} = -2p.$$

எனவே $\frac{dR}{dx} = R^1 = \frac{dR}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{9 - 3p^2}{(-2p)}$

$\frac{dR}{dp} = 0$ என்றால் $9 - 3p^2 = 0$ அதாவது $p = 3,\ p = \sqrt{3}$

எனவே $x = 9 - p^2 = 9 - 3 = 6$ ஆகிறது.

$$\frac{d^2R}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dR}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{9 - 3p^2}{-2p}\right]$$

$$= \frac{d}{dp}\left[\frac{9 - 3p^2}{-2p}\right] \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$= \frac{[(-2p)(-6p) - (9 - 3p^2)(-2)]}{4p^2} \times \frac{1}{-2p}$$

$$= \frac{12p^2 + 18 - 6p^2}{-8p^3} = \frac{6p^2 + 18}{-8p^3} < 0.$$

(இங்கு $p = \sqrt{3}$ என்று சமனிட)

எனவே மொத்த வருவாய் ஒரு உச்ச மதிப்பைப் பெறுகிறது அந்த உச்ச மதிப்பு $= [9p - p^3]_{p = \sqrt{3}}$

$$= 9\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

இப்போது $R = xp \ldots f(\cdot)$ என்று வைத்துக்கொண்டு உச்ச மதிப்பைக் கண்டுபிடித்தாலும் அதே மதிப்புதான் வருவதைக் காணலாம்.

$x = 9 - p^2$ என்றால்,

$$p = \sqrt{(9 - x)}$$

$$R = x \cdot \sqrt{(9 - x)}$$

$$= \sqrt{(9x^2 - x^3)}$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(9x^2 - x^3)}} \cdot (18x - 3x^2)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{6x - x^2}{x\sqrt{9 - x}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6 - x}{\sqrt{(9 - x)}}.$$

$\frac{dR}{dx} = 0$ என்ற சமயத்தில் $x = 6$ ஆகிறது.

$$\frac{d^2R}{dx^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{(9-x)}(-1) - (6-x) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{9-x}} \cdot (-1)}{(9-x)}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{-2(9-x) + (6-x)}{2(9-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{x - 12}{2(9-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{3(x-12)}{4(9-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\left[\frac{d^2R}{dx^2}\right]_{x=6} = \left[\frac{3(x-12)}{4(9-x)^{\frac{3}{2}}}\right]_{x=6} < 0.$$

எனவே மொத்த வருவாய் ஒரு உச்ச மதிப்பைப் பெறுகிறது.

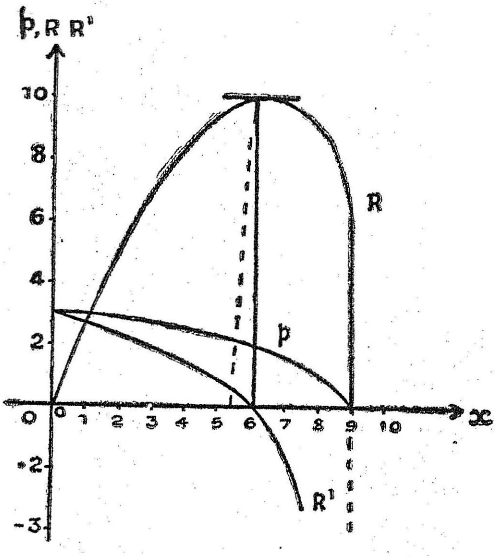
அந்த உச்ச மதிப்பு $= [R(x)]_{x=6} = [x\sqrt{9 - x}]_{x=6}$

$$= 6\sqrt{3}.$$

இதன் மூலம் முன்னைய முறையிலும் இம்முறையிலும் ஒரே விளைவுதான் ஏற்படுகிறது என்பது புலனாகிறது. மொத்த வருவாய், விளிம்பு வருவாய் இவற்றின் வளைகோடுகளை வரைவோம்.

வரைபடத்திற்குப் பயன்படக்கூடிய மதிப்புகள்

x	p	R	R'
0	3	0	3
5	2	10	$\frac{3}{4}$
8	1	8	−3
9	0	0	∞
6	$\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	0



படம் 34.

p = சராசரி வருவாய் வளைகோடு

R = மொத்த வருவாய் வளைகோடு

$R' = \frac{dR}{dx}$ = விளிம்பு வருவாய் வளைகோடு

மாதிரி

$p = 6 - x^2$ என்ற தேவை நியதிக்கு

மொத்த வருவாய் $R = xp = x(6 - x^2)$

$= 6x - x^3$

சராசரி வருவாய் $p = 6 - x^2$

விளிம்பு வருவாய் $\frac{dR}{dx} = R' = 6 - 3x^2$

$\frac{dR}{dx} = 0$ என்றால் $6 - 3x^2 = 0 \quad 3x^2 = 6; \quad x^2 = 2$

$$x = \sqrt{2}$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -6x$$

$$\left[\frac{d^2R}{dx^2}\right]_{x=\sqrt{2}} = \left[-6x\right]_{x=\sqrt{2}} = -6\sqrt{2} < 0$$

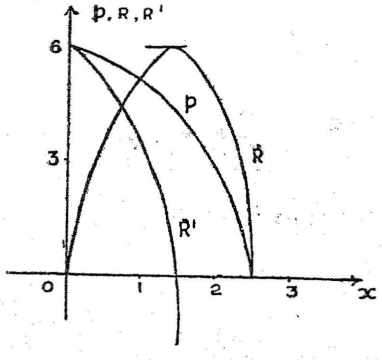
எனவே $x = \sqrt{2}$ என்ற மதிப்பில் உச்ச அளவு மொத்த வருவாய் கிடைக்கிறது.

மொத்த வருவாயின் உச்ச அளவு $= [R(x)]_{x=\sqrt{2}}$

$$= [6x - x^3]_{\sqrt{2}}$$

$$= (6\sqrt{2} - 2\sqrt{2})$$

$$= \underline{4\sqrt{2}}$$



படம் 35.

x	p	R	R'
0	6	0	6
$\sqrt{6}$	0	0	-12
$\sqrt{2}$	4	$4\sqrt{2}$	0

மாதிரி

$p = a - bx$ என்ற நேர்கோட்டு தேவை நியதிக்கு மொத்த வருவாய்

$R = ax - bx^2$. (இங்கு a, b நேர் நிலை எண்கள்)

சராசரி வருவாய் :

$$p = \frac{R}{x} = a - bx.$$

விளிம்பு வருவாய் :

$$\frac{dR}{dx} = R^1 = a - 2bx.$$

இப்போது $\frac{dR}{dx} = 0$ என்றால் $a - 2bx = 0$

அதாவது $x = \frac{a}{2b}$.

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -2b < 0$$

எனவே R-ன் உச்ச அளவு $= [R(x)]_{x=\frac{a}{2b}}$

$$= [ax - bx^2]_{x=\frac{a}{2b}}$$

$$= a \cdot \frac{a}{2b} - b \cdot \frac{a^2}{4b^2}$$

$$= \frac{a^2}{2b} - \frac{a^2}{4b}$$

$$= \frac{2a^2 - a^2}{4b} = \frac{a^2}{4b}$$

$R = ax - bx^2$ ஐ-வேறுவிதமாகவும் எழுதலாம்.

$$R = -b\left(x^2 - \frac{a}{b}x\right)$$

$$= -b\left[x^2 - 2\frac{a}{2b}x + \frac{a^2}{4b^2} - \frac{a^2}{4b^2}\right]$$

$$= -b\left[\left(x - \frac{a}{2b}\right)^2 - \frac{a^2}{4b^2}\right]$$

அல்லது $R - \frac{a^2}{4b}$

$$= -b\left[x - \frac{a}{2b}\right]^2$$

எனவே $R - \frac{a^2}{4b} = -b\left(x - \frac{a}{2b}\right)^2$ என்ற சமன்பாடு ஒரு பரவளைவுச் சமன்பாடு (parabolic equation).

$x = \frac{a}{2b}$ புள்ளிதான் இப் பரவளைவின் உச்சி.

$x = \frac{a}{2a}$ புள்ளியில் வலது பக்க மதிப்பு பூஜ்யமாகிறது.

எனவே $R = \frac{a^2}{4b}$

வரி விதிப்புக்குப் பின் மொத்த வருவாய் (Total Revenue after Taxation)

ஒரு பொருளின் சமநிலை அளவு அதாவது தேவையானது, t என்ற வரி விதிப்புக்குப் பிறகு, x என்றால், அரசாங்கத்திற்கு கிடைக்கும் மொத்த வருவாய், (Total Revenue) T என்றால் $T = tx$ ஆகும்.

(இங்கு ஒரு அலகுக்கான வரி t என்றால் x அலகுக்கு tx மொத்த வரி வருவாய்)

தேவை நியதி $p_1 = f(x)$

அளிப்பு நியதி $p_1 = \phi(x) + t$ எனக் கொள்வோம்.

$t = 0$ எனும்போது, வருவாய் பூஜ்யமாகும்.

t மிகவும் அதிக மதிப்பாகும்போதும், தேவை குறைந்து பூஜ்யத்தை அணுகி, வருவாயும் பூஜ்யமாகும்.

எனவே இடையிலுள்ள t மதிப்பில் T என்ற மொத்த (வரி) வருவாய் உச்ச அளவை எட்டும்.

T சார்பலனை x-ன் சார்பலனாகவோ அல்லது t-ன் சார்பலனாகவோ கருதி T-ன் உச்சமதிப்பைக் கண்டறியலாம். பொதுவாக T என்பது x-ன் சார்பலனாகவே கருதப்படுகிறது.

உதாரணமாக,

தேவை நியதி : $3p + 2x = 27$

அளிப்பு நியதி : $p = \frac{3}{2} + \frac{x}{3} + t$ என்றால்

$$p = 9 - \frac{2}{3}x = \frac{3}{2} + \frac{x}{3} + t$$

எனவே $x = 9 - \frac{3}{2} - t = \frac{15}{2} - t$

$$x = \frac{15}{2} - t.$$

எனவே, $T = t \cdot x = t\left(\frac{15}{2} - t\right)$

$$= \frac{15}{2}t - t^2.$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{15}{2} - 2t.$$

இப்போது $\frac{dT}{dt} = 0$ என்றால், $\frac{15}{2} - 2t = 0.$

$$15 = 4t \quad t = \frac{15}{4}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -2 < 0.$$

எனவே T-ன் உச்ச மதிப்பு $= \left[\frac{15}{2}t - t^2\right]_{t = \frac{15}{4}}$

$$= \frac{15}{2} \cdot \frac{15}{4} - \left(\frac{15}{4}\right)^2$$

$$\frac{225}{8} - \frac{225}{16} = \frac{225}{16}$$

மேலும் $t = \frac{15}{4}$ எனும்போது,

$$x = \frac{15}{2} - \frac{15}{4} = \frac{15}{4}.$$

$$p = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}x + t$$

$$p = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{4} + \frac{15}{4}.$$

$$= \frac{6 + 5 + 15}{4} = \frac{26}{4} = \frac{13}{2}.$$

மாதிரி

அடுத்து T-ஐ x-ன் சார்பலனாகக் கருதினால் உச்ச மதிப்பு எப்படிக் கிடைக்கிறது எனப் பார்ப்போம்.

$p = 20 - x^2$ என்பது தேவை நியதி; t என்ற அளவு வரி விதிப்புக்கு முன்னால் அளிப்பு நியதி $p = 2 + x^2$, என்றால் அரசாங்கத்துக்குக் கிடைக்கும் மொத்த வருவாய் என்ன என்று கணிக்கவும்.

வரி விதித்த பின்னர்,

$$p = 20 - x^2 = 2 + x^2 + t$$

$$2x^2 = 18 - t$$

அதாவது $t = 18 - 2x^2$

$$T = tx = (18 - 2x^2)\,x$$

$$= 18x - 2x^3$$

$$\frac{dT}{dx} = 18 - 6x^2.$$

இப்போது $\frac{dT}{dx} = 0$ என்றால் $18 - 6x^2 = 0$; $\underline{x^2 = 3}$

எனவே $x\ \sqrt{3}$.

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -12x = -12\sqrt{3} < 0.$$

எனவே T ஒரு உச்ச மதிப்பை $x = \sqrt{3}$-ல் பெறுகிறது.

T-ன் உச்ச மதிப்பு $= [T(x)]_{x=\sqrt{3}}$

$$= (18x - 2x^3)_{x=\sqrt{3}}$$

$$= 18\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$$

$$= \underline{12\sqrt{3}.}$$

t-ன் மதிப்பு $= 18 - 2(\sqrt{3})^2 = 18 - 6 = 12$

p-ன் மதிப்பு $= 20 - x^2 = 20 - 3 = 17.$

இப்போது T-ஐ t-ன் சார்பலனாகக் கருதி இதே மதிப்புகள் கிடைப்பதைக் காணலாம்.

$$p = 20 - x^2 = 2 + x^2 + t$$

எனவே $2x^2 = 18 - t$.

$$x = \sqrt{\frac{18-t}{2}}$$

$$T = tx = t \cdot \sqrt{\frac{18-t}{2}} \cdot = \sqrt{\frac{18t^2 - t^3}{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{18t^2 - t^3}} \cdot \times (36t - 3t^2)$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{(12t - t^2)}{\sqrt{(18t^2 - t^3)}}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(12 - t)}{\sqrt{(18 - t)}}$$

$\frac{dT}{dt} = 0$ என்றால் அது $t = 12$ எனும் போதுதான்,

$$\frac{p^2T}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{12-t}{\sqrt{(18-t)}}\right]$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{[\sqrt{(18-t)}](-1) - (12-t)\frac{1}{2\sqrt{18-t}}(-1)}{(18-t)}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{-2(18-t) + (12-t)}{2(18-t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{t - 24}{2(18-t)^{\frac{3}{2}}}$$

$t = 12$ எனும்போது $\frac{d^2T}{dt^2} < 0$ ஆகிறது.

எனவே T-ன் உச்ச மதிப்பு $t = 12$-ல் அமைகிறது.

T-ன் உச்ச மதிப்பு,

$$= \left[T(t) \right]_{t=12} = \left[t \cdot \sqrt{\frac{18-t}{2}} \right]_{t=12}$$

$$= 12 \cdot \sqrt{\frac{18-12}{2}} = 12 \cdot \sqrt{3}$$

x-ன் மதிப்பு $= \left[\sqrt{\frac{18-t}{2}} \right]_{t=12}$

$$= \sqrt{\frac{18-12}{2}} = \sqrt{3}.$$

p-ன் மதிப்பு $= 20 - x^2 = 20 - 3 = 17.$

எனவே இரு முறைகளிலும் சமமான மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம்.

பயிற்சிகள்

1. ஒரு திரைப்பட அரங்கில், ஒரே சீரான மதிப்பில் 1 டிக்கட் p ரூபாய் என்று விதித்தால் திரைப்படம் காணவரும் ரசிகர்களின் எண்ணிக்கை x என்றால்

$x = \frac{a}{b} - b$ என்ற நியதியை எடுத்துக் கொள்வோம். 3000 நபர்கள் உட்காரும் வசதிபெற்ற அரங்கு, 1 ரூ. டிக்கட் என்றால் பாதி அளவு நிறைகிறது; ரூ. 0·75 ஒரு டிக்கட் என்றால், ஆறில் ஒரு பங்கு இடம் காலியாக உள்ளது. இங்கு a, b நிலை எண்கள். இப்போது a, b இவற்றின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடவும். அரங்கு முழுதாக நிரம்பி இருப்பதற்கு எவ்வளவு கட்டணம் வசூலிக்கப்படவேண்டும்? இந்தக் கட்டணத்தில் மொத்த வசூல் எவ்வளவாக இருக்கும்?

2. தேவை நியதி $3p = 105 - x$ என்றால், உச்ச அளவு மொத்த வருவாய் என்ன என்று கண்டுபிடிக்கவும். ஒரே வரை படத்தில் தேவை வளைகோடு, மொத்த வருவாய், விளிம்பு வருவாய் வளைகோடுகள் இவற்றையும் வரைக.

3. தேவை வளைகோடு $\frac{x}{x_0} + \frac{p}{p_0} = 1$ என்ற நேர்கோடு என்றால், மொத்த வருவாயின் உச்ச அளவு, $x = \frac{x_0}{2}$ மதிப்பில்

ஏற்படுகிறது என நிரூபிக்கவும். மேலும் மொத்த வருவாயின் உச்ச மதிப்பு $= \frac{p_0 x_0}{4}$ என்று காட்டுக.

4. தேவை வளைகோடு $p = (10 - x)^2$, $(0 \leqslant x \leqslant 10)$ என்றால் உச்ச வருவாயைக் கண்டுபிடிக்கவும். மொத்த வருவாய்க்கான வளைகோடு வரையவும்.

5. தேவை வளைகோடு $p = \sqrt{27 - x}$ என்றால், மொத்த வருவாயை x-ன் சார்பலனாகவும், p-ன் சார்பலனாகவும் தனித் தனியாக எழுதுக. ஒவ்வொரு முறையிலும் உச்ச வருவாய், அதற்கேற்ற விலைகள், தேவை அளவுகள் இவற்றைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

6. $p = \frac{8}{4 + x^2}$ என்ற தேவை நியதிக்கு, உச்ச வருவாயைக் கணக்கிடுக. தேவை வளைகோட்டையும், மொத்த வருவாய் வளைகோட்டையும் வரைக.

7. தேவை வளைகோடு $p = \frac{12}{\sqrt{x}}$, $(1 \leqslant x \leqslant 9)$ என்ற ஒரு பொதுவான அதிபர வளைவு (Hyper bola) என்றால். மொத்த வருவாய், x-ன் ஒரே முறை ஏறும் சார்பலன் என்று நிரூபித்துக் காட்டுக. அதன் மூலம் ஒரு கடைப்புள்ளியில் மொத்த வருவாய் உச்ச மதிப்பைப் பெறுகிறது என்றும் நிரூபி.

8. தேவை நியதி : $5x + 3p = 30$.

அளிப்பு நியதி : $p = 2 + x + t$; (இங்கு t என்பது வரி) என்றால் வரியினால் கிடைக்கும் மொத்த வருவாய் எவ்வளவு?

9. பண்டத்தின் ஒரு அலகுக்கு t வரி விதிக்கப்படும் முன்பு

தேவை நியதி : $p = 24 - 2x$,

அளிப்பு நியதி : $p = 2 + x$ என்றால்,

அரசாங்கத்துக்குக் கிட்டும் மிக அதிகமான வருவாய் எவ்வளவு என்று கண்டுபிடி. படம் வரைந்தும் விளக்குக.

10. தேவை நியதி : $p = 39 - 3x^2$

அளிப்பு நியதி : $p = 3 + x^2$ என்றால்,

x-பொருளின் ஒவ்வொரு அலகுக்கும் t வரி விதிக்கப்பட்ட பிறகு அரசாங்கத்துக் கிடைக்கும் மொத்த வருவாய் எவ்வளவு எனக் கண்டுபிடிக்கவும். வடிவ கணிதமுறைப்படி படம் வரைந்து வருவாயின் உச்ச அளவின் மதிப்பை ஒட்பிட்டு சரிபார்க்கவும்.

11. $p = 45 - x^2$ என்ற தேவைச் சமன்பாடும். $p = 6 + 2x - t$ என்ற அளிப்புச் சமன்பாடும் கொடுக்கப் பட்டால், t என்ற வரி விதிக்கப்பட்டதால் அரசாங்கத்திற்குக் கிடைத்த மொத்த வருவாயின் உச்ச அளவைக் கணிக்கவும். மேலும் t-ன் மதிப்பு. x-ன் அளவு, p-ன் மதிப்பு மூன்றையும் கண்டு பிடிக்கவும்.

இங்கு மொத்த வருவாய் T-ஐ முதலில் x-ன் சார்பலனாகக் கொண்டு உச்ச அளவைக் கண்டுபிடிக்கவும். பிறகு T-ஐ t-ன் சார்பலனாகக் கொண்டு T-ன் உச்ச அளவைக் கண்டுபிடித்து இரண்டு மதிப்புகளையும் ஒப்பிட்டுச் சரிபார்க்கவும்.

12. (i) $p = \sqrt{a - bx}$

(ii) $p = a - bx^2$ என்ற தேவை வளைகோடுகளுக்கு, தேவை வளைகோடுகளும், விளிம்பு வருவாய் வளைகோடுகளும் கீழிருந்து குழிந்த வளைகோடுகள் என்றும், கீழ்நோக்கிச் சரிந்தவை யென்றும் நிரூபித்துக் காட்டு.

"செலவு, சராசரிச் செலவு, விளிம்புச் செலவு" (Cost, Average cost. Marginal cost)

ஒரு பண்டத்தின் x அலகுகளை உற்பத்தியாக்கும் (சந்தைக்கு விலைக்கு வரும்), செலவை "மொத்தச் செலவு" (Total cost) என்று குறிக்கிறோம். இந்த மொத்தச் செலவு, x-ன் சார்பலனாக மட்டுமே இருப்பதாகக் கொள்வோம். மற்ற பண்டங்களையோ, நேரத்தையோ சார்ந்திராமல் இது x-ன் சார்பலனாகவே இருக்கிறது. மொத்தச் செலவை Π என்று குறிப்பிட்டால் "சராசரிச் செலவு" (Average cost) அல்லது "ஒரு அலகுக்கான செலவு" $\pi = \dfrac{\Pi}{x}$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

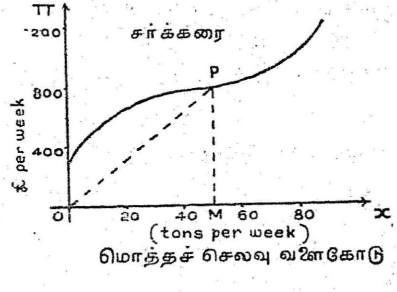
x என்பதைக் குறித்து, Π-ன் செலவு மாற்றத்தின் வீதத்தை விளிம்புச் செலவு என்கிறோம்.

இதையே $\dfrac{d\,\Pi}{dx}$ = விளிம்புச் செலவு என அழைக்கின்றோம்.

இங்கு விளிம்புச் செலவு என்பது "செலவின் வகைக்கெழு"வே

யாகும். செலவு என்று தனியாகக் கூறும்போது இது மொத்தச் செலவையே குறிக்கும் என்று அறியவும். இதைப்போன்றே விளிம்புச் சராசரிச் செலவு (marginal average cost) என்பது சராசரிச் செலவின் வகைக்கெழு $= \frac{d\pi}{dx} = \frac{d\pi}{dx}$ ஆகும்.

ஒரு நிறுவனம் அல்லது தொழிற்சாலை ஒரு பண்டத்தை உற்பத்தி செய்வதற்கு, சில உற்பத்திக் காரணிகளைப் பயன்படுத்துகிறது. சில காரணிகள், நிறுவனத்தின் உற்பத்தியைச் சாராத வகையில், நிலையான அளவுகளில் (infixed amounts) பயன்படுத்தப் படுகின்றன. இத்தகைய காரணிகளால் ஏற்படும் செலவு "நிலைந்த செலவு" அல்லது மாறாச்செலவு (Fixed cost) எனப்படும். மீதமுள்ள காரணிகள் மாறுபடுபவை; ஆகவே அவற்றின் மூலம் ஏற்படும் செலவுகள் 'மாறுஞ்செலவு'களாகும் (variable costs). மாறுபடும் காரணிகளின் அளிப்பு நிபந்தனைகள் நமக்குத் தெரிந்து இருப்பதாக அனுமானிப்போம். எடுத்துக்காட்டாக, நிலைத்த (மாறாத) சந்தை விலைகளில், காரணிகள் கிடைக்கலாம். உற்பத்திக்கான தொழில்நுட்ப நிபந்தனைகளும் நாம் அறிந்துள்ளதாகக் கொள்வோம். முடிந்தவரை சிறிய அளவு மொத்தச் செலவு Π-ல் X பண்டத்தின் x அளவு உற்பத்தி செய்வதற்கான மாறுபடும் காரணிகளை (variable factors) உபயோகிக்கும் அளவைச் சரிசெய்து கொண்டு, நிறுவனம் உற்பத்தியை ஆரம்பிக்கிறது. இப்போது x-தரப்பட்டால், Π தீர்மானிக்கப்படுகிறது. எனவே x-க்கு மட்டுமே முழுக்க முழுக்கச் சார்ந்த சார்பலனே $\Pi(x)$ ஆகும். இங்கு $\Pi(x) = F(x)$ என்றும் கூறலாம். இந்த செலவுச் சார்பலன் (cost function) ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பலன் ஆகும்.



மொத்தச் செலவு வளைகோடு

படம் 36.

இயல்பான நிபந்தனைகளில் ஏதாவது ஒரு உற்பத்திக் காரணியாவது மாறாமல் நிலைத்து இருந்தால், அப்போது பொருளின் ஒரு

அலகும் தயாரிக்கப்படாத நிலையில் ஏற்படுகின்ற நிலைத்த (மாறுத) செலவை "பொதுச் செலவு" (overhead cost) எனக் கூறலாம். மற்றபடி பொருள்கள் தயாரிக்க ஆரம்பித்தவுடன், x அளவு கூடக்கூட மாறுஞ்செலவு வளைகோடு (Total cost curve) Π என்ற செங்குத்து அச்சை ஆதிக்குமேலே உள்ள ஒரு புள்ளியில் வெட்டுகிறது. அவ்வளைகோடு இடது பக்கமிருந்து வலதுபக்கமாக மேல்நோக்கி தொடர்ச்சியாக ஏறுகிறது.

முன் பக்கத்தில் வரையப்பட்ட படம் ஒரு சர்க்கரை தூய்மை செய்யும் நிறுவனத்திலிருந்து கிடைத்த விபரங்களிலிருந்து வரையப்பட்ட இயல்பான மொத்தச் செலவு வளைகோட்டுப் படம் ஆகும். இங்கு பொதுச்செலவு £250 (வாரத்துக்கு) உற்பத்தி கூடக்கூட, மொத்தச் செலவும்கூடி, 80 டன் வார உற்பத்தியளவில் மொத்தச் செலவு £1000 ஆகிறது. இயல்பான மொத்தச் செலவுச் சார்பலன்களுக்கான உதாரணங்கள் :

(1) $\Pi = F(x) = ax + b$

(2) $\Pi = ax^2 + bx + c$

(3) $\Pi = \sqrt{ax + b} + e$

(4) $\Pi = ax^3 - bx^2 + cx + d$

(5) $\Pi = ax \cdot \dfrac{x + b}{x + c} + d$

(6) $\Pi = ae^{bx}$

(7) $\Pi = x^a e^{bx+c} + d$

இவ்வாறுன செலவுச் சமன்பாடுகளில் a, b, c, d நேர் நிலை எண்கள்.

$\Pi = ax + b$ என்பது செலவின் ஒருபடிச் சார்பலன்.

$\Pi = ax^2 + bx + c$ என்பது செலவின் இருபடிச் சார்பலன்.

$\Pi = a e^{bx}$ என்பது செலவின் ஒரு அடுக்குச் சார்பலன்.

இப்போது $\Pi = ax^2 + bx + c$ சார்பலனை எடுத்துக் கொண்டால் இந்த செலவுச் சார்பலன் ஒரு பரவளைவு ஆகும். $x = -\dfrac{b}{2a}$ புள்ளியில் பரவளையின் உச்சி அமைகிறது. பரவளைவின் அச்சு செங்குத்தாக மேல்நோக்கி இருக்கும். இச்சமன்பாட்டில் c என்பது பொதுச்செலவைக் குறிக்கும். a, b அளவுகளின் மாற்றங்கள், மாறுஞ்செலவில் மாற்றத்தைக் குறிக்கும்.

சராசரிச் செலவானது $= \frac{\Pi}{x} = \frac{F(x)}{x} = \pi$ என்பதால் மேலே வரையப்பட்ட படத்தில்,

$$OP\text{-ன் சரிவு} = \frac{MP}{OM} = \frac{\Pi}{x} = \pi \text{ சராசரிச் செலவாகும்.}$$

சராசரிச் செலவுச் சார்பலன் $\pi = f(x)$ எனப்படும். மொத்தச் செலவு சார்பலன் $\Pi = F(x) = ax^2 + bx + c$ என்பது அச்சுக்கள் மேல் நோக்கியுள்ள ஒரு பரவளைவின் எழும்பும் பகுதியைக் காட்டுகின்றது.

சராசரிச் செலவுச் சார்பலன் (Average cost)

$\pi = ax + b + \frac{c}{x}$ என்பது U-வடிவுடைய ஒரு வளை கோடாகும்.

விளிம்புச் செலவு வளைகோடு (Marginal cost)

$\frac{d\Pi}{dx} = 2ax + b$ என்பது ஒரு நேர்கோடு ஆகும். '$2a$' என்ற சரிவுடன் நோக்கிச் செல்லும் ஒரு நேர்கோடு ஆகும்.

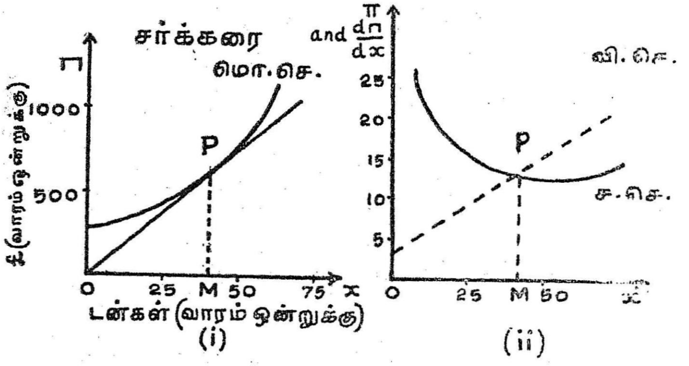
$\Pi = \frac{1}{10}x^2 + 5x + 200$ என்ற மொத்தச் செலவுச் சார்பலனை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\pi = \frac{1}{10}x + 5 + \frac{200}{x}$ என்பது சராசரிச் செலவு சார்பலன். $\frac{d\Pi}{dx} = \frac{2x}{10} + 5$ என்பது விளிம்புச் செலவு சார்பலன் ஆகும். ஒவ்வொரு வாரத்துக்கும் விற்பனைக்கு தயாராகும் சர்க்கரையின் x டன்களை x அச்சிலும் £ p விலைகளை y அச்சிலும், ஷை மொத்த சராசரி, விளிம்புச் செலவுச் சமன்பாடுகளுக்கு வரை படங்கள் வரைந்து விளக்குவோம்.

இங்கு $\Pi = \frac{1}{10}x^2 + 5x + 200$. 2-வது படத்தின் மூலம் விளிம்புச் செலவு நேர்கோடு, சராசரிச் செலவு வளைகோட்டின் மீச்சிறு அளவு வழியாகச் செல்வதைக் காண்கிறோம். இச்சமயத்தில் x-ன் அளவு $= OM$. இப்போது படம் 1-ல் OM அளவுக்கான புள்ளி p-லிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடு ஆதி (O)-யின்

வழியாகச் செல்கிறது. அத்தகைய $x = OM$ மதிப்பில், சராசரி செலவு = விளிம்புச் செலவு ஆகிறது. $\Pi = ax + b$ எனும்போது

$$\pi = \frac{\Pi}{x} = \frac{ax + c}{x} = a + \frac{b}{x} = \text{சராசரிச் செலவு.}$$



$$\Pi = \frac{1}{10}x^2 + 5x + 200.$$

மொ. செ. : மொத்தச் செலவு வளைகோடு
வி. செ. : விளிம்புச் செலவு வளைகோடு
ச. செ. : சராசரிச் செலவு வளைகோடு

படம் 37.

$\frac{d\,\Pi}{dx} = a =$ விளிம்புச் செலவு. ஒரு நிலை எண்ணுகை உள்ளது.

d இங்கு சராசரிச் செலவைக் கவனித்தால் x அளவு அதிகரிக்க அதிகரிக்க, π, சராசரிச் செலவு குறைவதைக் காண்கிறோம். தொழிற்பட்டரைகளில் x-ன் அதிக அளவு உற்பத்திகளில் இத்தகைய சூழ்நிலை ஏற்படுவதை அடிக்கடி பார்க்கின்றோம்.

மாதிரி

$\Pi(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 2x + 9)$ என்ற பரவளைவை எடுத்துக் கொள்வோம். இது ஒரு மொத்தச் செலவுச் சார்பலன்.

$$\pi = \frac{\Pi(x)}{x} = \frac{1}{4}\left(x - 2 + \frac{9}{x}\right) = \text{சராசரிச் செலவு சார்பலன்,}$$

$$\text{விளிம்புச் செலவு} \frac{d\,\Pi}{dx} = \frac{1}{4}(2x - 2) = \frac{x-1}{2}.$$

இப்போது மொத்தச் செலவு வளைகோட்டையும் சராசரிச் செலவு வளைகோட்டையும் ஒரே வரைபடத்தில் வரைந்து மேற்கொண்டு விளக்குவோம்.

$$\Pi = F(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 2x + 9)$$

$x = 2$ என்றால் $\Pi = \frac{1}{4}(4 - 4 + 9) = \frac{9}{4}$

$x = 3;\quad \Pi = \frac{1}{4}(9 - 6 + 9) = \frac{12}{4} = 3$

$x = 4;\quad \Pi = \frac{1}{4}(16 - 8 + 9) = \frac{17}{4}.$

இம்மூன்று புள்ளிகளைக் கொண்டும் $x = 0$ $\Pi = \frac{9}{4}$ என்ற புள்ளியைக் கொண்டும் மொத்தச் செலவு வளைகோடு வரையலாம். x 1 என்றால் $\Pi = \frac{1}{4}(1 - 2 + 9) = 2$ என்ற புள்ளியை செலவு மிகக் குறைந்து பிறகு அதிகரிப்பதைப் பார்க்கிறோம்.

ஒரு சார்பலனின் மீச்சிறு, அல்லது உச்ச அளவைக் கண்டு பிடிக்கப் பயன்படும் நிபந்தனைகளின் மூலமும் மொத்த செலவு (1, Π 2) புள்ளியில்தான் மீச்சிறு மதிப்பை அடைகிறது என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

$$\Pi = F(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 2x + 9)$$

$$F'(x) = \frac{1}{4}(2x - 2) = \frac{x-1}{2}$$

$$F''(x) = \frac{1}{2}.$$

நிபந்தனைகள் படி (i) $F'(x) = 0$ at $x = x_1$.

எனவே $\frac{x-1}{2}$ 0 அதாவது $x = 1$ என்ற புள்ளியில் ... புள்ளியில் (ii) $F''(x) > 0$ என்றால், $F(x)$ மீச்சிறு மதிப்பை அடைகிறது என்று பொருள்.

இங்கு $F''(x) = \frac{1}{2}$ எல்லாப் புள்ளிகளிலும், (ஏனெனில் இது ஒரு நிலை எணணுகும்).

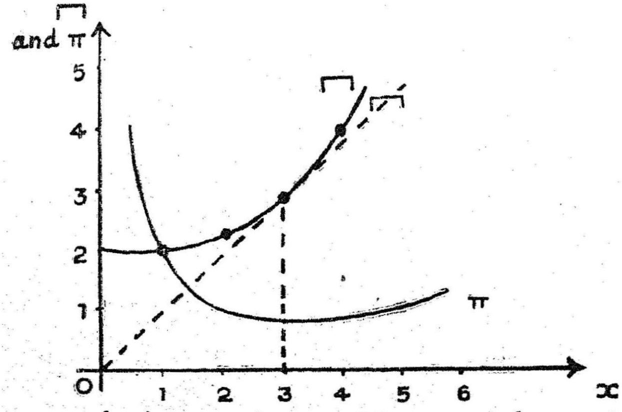
எனவே $F(x)$ சார்பலன் $x = 1$ என்ற புள்ளியில் மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$$\therefore \; F(x)\text{-ன் மீச்சிறு மதிப்பு} = \left[\frac{1}{4}(x^2 - 2x + 9)\right]_{x=1}$$

$$= \frac{1}{4}(1 - 2 +) = \underline{2.}$$

இந்த இருபடிச் சமன்பாடு $\frac{1}{4}$ $(x^2 - 2x + 9)$, x-ன் $(0 \leqslant x < 1)$ என்ற இடைவெளியில் ஒரு செலவுச் சார்பலன் ஆகாது.

$x \geqslant 1$ ஆக இருக்கும்போது மட்டுமே இது ஒரு மொத்தச் செலவுச் சார்பலனுகும். எனவே $x = 0$ என்ற புள்ளியில் $\Pi = \frac{9}{4}$ என்ற மதிப்பு பொருளாதார ரீதியில் எந்த சிறப்பும் கிடையாது. அந்த மதிப்பு பொதுச் செலவைக் காட்டாது.



மொத்தச்செலவும் சராசரிச் செலவும் (⊓ and π)

படம் 38.

$$\pi = \frac{1}{4}\left(x - 2 + \frac{9}{x}\right)$$

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{9}{x^2}\right), \qquad \frac{d\pi}{dx} = 0 \text{ என்பது}$$

$x = 3$-ல் தான்.

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = \frac{9}{2x^3}. \quad \left[\frac{d^2\pi}{dx^2}\right]_{x=3} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} > 0.$$

எனவே சராசரிச் செலவு $x = 3$ எனும்போது மீச்சிறு மதிப்பை அடைகிறது.

$\therefore$ சராசரிச் செலவின் மீச்சிறு மதிப்பு

$$= \frac{1}{4}\left[x - 2 + \frac{9}{x}\right]_{x=3}$$

$$= \frac{1}{4}\left[3 - 2 + \frac{9}{3}\right] = \underline{1.}$$

மாதிரி

$\Pi = 4 + 2x + x^2$ என்றால் மீச்சிறு சராசரிச் செலவின் மதிப்பு என்ன ?

$$\Pi = 4 + 2x + x^2$$

$$\pi = \frac{\Pi}{x} = \frac{4}{x} + 2 + x$$

$$\frac{d\pi}{dx} = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2\pi}{dx^2} = \frac{4 \times 2}{x^3} = \frac{8}{x^3}.$$

சராசரிச் செலவு π-ன் மீச்சிறு மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க

$\frac{d\pi}{dx} = 0$-வுக்கான x-ன் மதிப்பில் $\frac{d^2\pi}{dx^2} > 0$ என்றால்

சராசரிச் செலவு π ஒரு மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறும்.

$$\frac{d\pi}{dx} = 0 \text{ என்றால் } 1 - \frac{4}{x^2} = 0$$

அதாவது $x = 2$ என்ற புள்ளியில் $\frac{d\pi}{dx} = 0.$

இதே $x = 2$ புள்ளியில்

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = \frac{8}{x^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0$$

எனவே π-ன் மதிப்பு $x = 2$ புள்ளியில் மீச்சிறு மதிப்பாகும்.

$$\therefore \quad \text{மீச்சிறு சராசரிச் செலவு} = \left[\frac{4}{x} + 2 + x \right]_{x=2}$$

$$= 2 + 2 + 2 = \underline{6}$$

மாதிரி

மொத்தச் செலவுச் சமன்பாடு $\Pi = F(x) = \sqrt{x+8}$, ($0 \leqslant x \leqslant 8$ என்ற இடைவெளியில்) என்ருல், சராசரிச் செலவும், விளிம்புச் செலவும் ஒவ்வொன்றும் எப்போதும் ஒரு குறையும் சார்பலன் என்று நிருபித்துக் காட்டுக.

ஒரு சார்பலன் $f(x)$ குறையும் சார்பலனுக இருப்பதற்கு $f'(x) < 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

இங்கு $\Pi \sqrt{x + 8}$.

$$\text{சராசரிச் செலவுச் சார்பலன்} = \pi = \frac{\Pi}{x} = \frac{\sqrt{x+8}}{x}$$

இச் சார்பலன் $0 \leqslant x \leqslant 8$ இடைவெளியில் ஒரு குறையும் சார்பலனுக இருப்பதற்கு, $\frac{d\pi}{dx} < 0$ ஆக இருக்கிறது என்று நிருபிப்போம்.

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{x \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x+8}} - \sqrt{(x+8)} \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{x - 2(x+8)}{2x^2 \sqrt{(x+8)}}$$

$$= \frac{-(x+16)}{2x^2 \sqrt{(x+8)}}$$

x-ன் நேர் மதிப்புகளுக்கு (0, 8) இடைவெளியில் $\frac{d\pi}{dx} < 0$ என்பது புலனாகிறது.

எனவே சராசரிச் செலவுச் சார்பலன் ஒரு குறையும் சார்பலனாகும் (decreasing function).

$$\Pi = F(x) = \sqrt{(x+8)}$$

$$\text{விளிம்புச் செலவுச் சார்பலன்} = \frac{d\Pi}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+8}}$$

இதன் வகைக்கெழு எதிர்மறையில் இருந்தால் விளிம்புச் செலவுச் சார்பலன் குறையும் சார்பலன் ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{d\Pi}{dx}\right) = -\frac{1}{4} \frac{1}{(x+8)^{\frac{3}{2}}} < 0.$$

(எல்லா நேர் x மதிப்புகளுக்கும்)

எனவே விளிம்புச் செலவு ஒரு குறையும் சார்பலனாகிறது.

மாதிரி

$\Pi(x) = e^{\frac{x}{5}}$, $0 \leqslant x \leqslant 10$ இடைவெளியில், என்றால் மீச்சிறு சராசரிச் செலவு என்னவாக இருக்கும்?

$$\pi(x) = \frac{1}{x} \cdot \Pi \cdot = \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{x}{5}}$$

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{x \cdot \frac{1}{5} e^{\frac{x}{5}} - e^{\frac{x}{5}} \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{5}} (x-5)}{5x^2}$$

$x = 5$ எனும்போது $\frac{d\pi}{dx} = 0$

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = \frac{(5x^2)\cdot\left[\frac{1}{5}e^{\frac{x}{5}}(x-5)+e^{\frac{x}{5}}\cdot(1)\right]-10x\cdot(x-5)\,e^{\frac{x}{5}}}{25x^4}$$

$$= \frac{x^2(x-\not{5}+\not{5})\,e^{\frac{x}{5}} - 10x\,(x-5)\,e^{\frac{x}{5}}}{25x^4}$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{5}}}{25x^4}\,[x^3 - 10x^2 + 50x]$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{5}}}{25x^3}\,(x^2 - 10x + 50)$$

$$\therefore \left[\frac{d^2\pi}{dx^2}\right]_{x=5} = \frac{e'}{25\cdot 5^3}(25-\not{50}+\not{50}) > 0.$$

∴ சராசரிச் செலவின் மீச்சிறு மதிப்பு

$$= \left[\frac{1}{x}\;e^{\frac{x}{5}}\right]_{x=5} = \frac{e'}{5} = \frac{e}{5}$$

$$= \frac{2\cdot7183}{5} = \underline{0\cdot54.}$$

(இங்கு $e' = 2\cdot7183$; e^x அட்டவணையிலிருந்து எடுக்கப் பட்டது.)

பயிற்சிகள்

1. ஒரு நிறுவனத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட எஃகு வகையைத் தயாரிக்க ஆகும் மொத்த செலவு $\Pi = F(x) = 56x + 182$ என்றால் இதற்கான மொத்தச் செலவு, சராசரிச் செலவு வளைகோடுகளை வரைக. சராசரிச் செலவுக்கு மீச்சிறு மதிப்பு என்று ஒன்றுமில்லை என்று நிரூபிக்கவும். ஆனால் சராசரிச் செலவு ஒரு நிலைத்த மதிப்பை அணுகும் என்று காட்டுக.

2. ஒரு கட்டிட ஒப்பந்தக்காரர் நிலைத்த பொதுச்செலவு 25,000 ரூபாயும் மற்ற செலவுகளுக்குதான் கட்டும் ஒவ்வொரு வீட்டிற்கும் 6000 ரூபாய் வீதம் செலவிடுகிறார். வீடுகளின்

எண்ணிக்கைக்கான சார்பலன்களாக மொத்தச் செலவையும் சராசரிச் செலவையும் எழுதுக. மொத்த, சராசரி செலவு வளை கோடுகளை வரைந்து, தன் சராசரி செலவு 6400 ரூபாய்க்கு குறைவாக இருப்பதற்காக தான் குறைந்தது எத்தனை வீடுகள் கட்டவேண்டும் என்று கண்டுபிடி.

3. மொத்தச் செலவுச் சார்பலன் $\Pi = \left(\frac{1}{50}\right)x^2 + 6x + 100$ $(0 \leqslant x \leqslant 200)$ என்றால், சராசரிச் செலவின் மீச்சிறு மதிப்பு என்ன? மொத்த செலவு வளைகோட்டையும், சராசரிச் செலவு வளைகோட்டையும் தனித்தனி வரைபடமாக வரைந்து விளக்கவும்.

4. ஒரு தொழில் நிறுவனம் வானொலிப் பெட்டிகளைத் தயாரிக்கிறது. ஒரு வாரத்துக்கு x பெட்டிகள் தயாரிக்கப்பட்டால், அதற்கான மொத்த மாறுஞ்செலவு $(3x + \frac{1}{25}x^2)$ ரூபாய் என்றால், x அதிகரிக்க அதிகரிக்க, சராசரி மாறுஞ்செலவும் படிப்படியாகக் கூடுகிறது என்று நிரூபித்துக் காட்டு.

5. ஒரு புகையிலைத் தயாரிப்பாளர் தினசரி x டன்கள் புகையிலைத் தயாரிக்க ஆகும் மொத்தச் செலவு £ $\frac{x(x+200)}{4(x+100)}$ என்றால் மொத்த, சராசரிச் செலவு வளைகோடுகளை வரைபடத்தில் வரைக. மேலும் ஒரு பவுண்டுக்கு 10 ஷில்லிங்கிலிருந்து தொடர்ச்சியாகக் குறைந்து கொண்டே வந்து கீழ் எல்லை 1 பவுண்டுக்கு 5 ஷில்லிங் எனக் குறைவதை நிரூபிக்கவும்.

6. முன் கணக்கில் $\Pi\ ax. \frac{x+b}{x+c}$ என்று பொதுப்படையான மொத்தச் செலவில் (a, b, c நிலை எண்கள்) $b > c$ என்றால், கூடும்போது மொத்தச் செலவு கூடுகிறது; சராசரிச் செலவு குறைகிறது எனக் காட்டுக.

7. மொத்தச் செலவு வளைகோடு $\Pi = \frac{x^2(x+100)}{400(x+400)} + 50$ என்றால் சராசரி, விளிம்புச் செலவுகளுக்கான சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

8. x-ன் எந்த மதிப்புகளுக்கு $\Pi = x^2 - 2x + 4$ என்பது ஒரு சரியான மொத்தச் செலவுச் சார்பலனாக இருக்கும்? இதற்கான மீச்சிறு சராசரிச் செலவைக் கண்டுபிடி.

9. செலவு வளைகோடு $\Pi = 4 \,.\, e^{\frac{x}{4}} \,.\, (0 \leqslant x \leqslant 8)$ என்றால் சராசரிச் செலவின் மிகச்சிறிய மதிப்பு என்ன ? மொத்தச் சராசரிச் செலவு வளைகோடுகளை வரைக.

10. சராசரிச் செலவு வளைகோடு $\pi = 8 + 4e^{-x}$; $(0 \leqslant x \leqslant 2)$ என்றால், கடைநிலைப் புள்ளிகளில் முறையே உச்ச, மீச்சிறு சராசரிச் செலவுகள் உள்ளன என்று நிரூபித்துக் காட்டு.

11. (i) $\Pi = \sqrt{(ax + b)} + c$

(ii) $\Pi = ax. \dfrac{x + b}{x + c} + d \;(> c)$

இந்த மொத்தச் செலவு சார்பலன்களுக்கு சராசரி விளிப்புச் சார்பலன்களைக் கண்டுபிடித்து x கூட கூடக் இவை குறைகின்றன என்று நிரூபி.

12. மடக்கை வகையீடும் சார்பலனின் நெகிழ்ச்சியும்

(Logarithmic Differentiation and Elasticity of a Function)

$y=f(x)$ என்பது x-ன் ஒரு ஒற்றை மதிப்புடைய ஒரு சார்பலன் எனக் கொள்வோம். பிறகு $\frac{d(\log y)}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dv}{dx}$ என்பது ஒரு முக்கியமான விளைவு, ஆகும். இது பல செய்முறை உபயோகங் களைக் கொண்டுள்ளது. x மாறி x-லிருந்து $x+h$-க்குக் கூடும் போது, சார்பலனின் மதிப்பில் விகிதாசார மாற்றமானது

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)} \text{ ஆகும்.}$$

இப்போது x என்ற புள்ளியில். சார்பலனின் மதிப்பில் காணப்படும் விகிதாசார மாற்றத்தின் வீதம் (rate of proportional change in the value of the function), கீழ்க்கண்டவாறு எழுதப்படுகிறது.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h \cdot f(x)} = \frac{1}{f(x)}, \lim_{h \to 0} \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \frac{1}{y} \cdot \frac{dv}{dx} \text{ (வரையறைப்படி)}$$

$$= \frac{d(\log y)}{dx} \text{ ஆகிறது.}$$

எனவே வகைக்கெழு $\frac{d(\log y)}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$ ஒரு சார்பலனின் மதிப்பில் காணப்படும் விகிதசம மாறுதலின் வீதத்தை அளந்து கணக்கிடப் பயன்படுகிறது. இதையே வேறுவிதமாக விவரிப்போம்.

$y = f(x)$ என்பது x-ன் ஒரு சார்பலன் என்றுல்

$\log y = \log f(x) = F(x)$ என்க.

மடக்கை விதிகளேப் பயன்படுத்தி $F(x)$-ன் எளிய வடிவத்தைப் பெறும் பொருட்டு, $f(x)$-ஐவிட $F(x)$-ஐ வகைப்படுத்துவது சுலபமாகும்.

எனவே $\frac{1}{y}$, $\frac{dy}{dx} = F'(x)$.

அல்லது $\frac{dy}{dx} = y \cdot F'(x)$.

இங்கு $F(x) = \text{loy } y = \log [f(x)]$ என்பதால் $F(x)$ ஒரு சார்பலனின் சார்பலனுகும். (function of a function) எனவே தான்

$$\frac{dy}{dx} = y, F'(x).$$

இவ் வழிமுறையை (process), "மடக்கை வகையீடு" (Logarithmic Differentiation or Logarithmic derivation) என்கிறேம்.

எடுத்துக்காட்டாக.

மாதிரி 1

$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ என்றுல்

$$\log y = -\frac{x^2}{2}.$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2} = -x$$

அல்லது $\frac{dy}{dx} = -xy = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

மாதிரி 2

வருவாய் $R = x\sqrt{9-x}$ என்ற சமன்பாடு ஆனுல்,

$\frac{dR}{dx}$-ன் மதிப்பை மடக்கைக் கெழுவின்மூலம் கண்டுபிடித்து வருவாய் வளைகோட்டை வரைக.

$R = x\sqrt{(9-x)}$ இங்கு x-ன் எல்லை $0 \leqslant x \leqslant 9$ ஆகிறது.

$$\log R = \log x + \log \sqrt{(9-x)}$$

$$= \log x + \frac{1}{2}\log(9-x) \text{ (மடக்கை விதிப்படி)}$$

இதை வகைப்படுத்தினல்,

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{dR}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9-x}(-1)$$

$$= \frac{2(9-x)-x}{2x(9-x)} = \frac{18-3x}{2x(9-x)} = \frac{3}{2}\;\frac{6-x}{x(9-x)}.$$

எனவே $\dfrac{dR}{dx} = R\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{6-x}{x(9-x)}$.

$$= x\cdot\sqrt{(9-x)}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{6-x}{x(9-x)}$$

$$\therefore\quad R' = \frac{dR}{dx} = \frac{3}{2}\cdot\frac{(6-x)}{\sqrt{(9-x)}}.$$

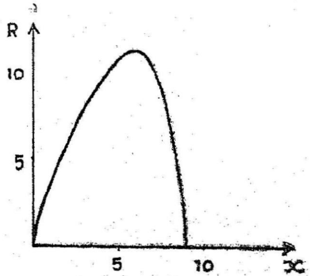
x-ன் மூன்று மதிப்புகளில் R, R′-ன் மதிப்புகளைக் கண்டறிந்து பிறகு வருவாய் வளைகோடு வரையலாம்.

$x = 0$; $\quad R = 0$; $\quad R' = 3$.

$x = 6$; $\quad R = 6\sqrt{(9-6)} = 10{\cdot}4$.; $\quad R' = 0$

$x = 9$; $\quad R = 0$; $\quad R' = \infty$.

மடக்கை வகைக்கெழு, x-ன் இரு சார்பலன்களின் பெருக்கலையோ, வகுத்தலையோ, எளிய முறையில் வகைப்படுத்துவதற்குப் பயன்படுகிறது.



படம் 39.

$y = uv$ என்ருல் [அதாவது $u = u(x)$, $v = v(x)$]

$$\log y = \log(uv)$$

$$= \log u + \log v$$

இச் சமன்பாட்டை x-க்கு வகைப்படுத்தினால்,

$$\frac{d}{dx}\log y = \frac{d}{dx}\log u + \frac{d}{dx}\log v\,.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}\,.$$

இதேபோல $y = \dfrac{u}{v}$ என்றால்

$$\log y = \log u - \log v$$

$$\therefore\quad \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} - \frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}\,.$$

இதே முறையில் பொதுவாக கீழ்க்கண்ட சார்பலனை எடுத்துக் கொண்டால், அதாவது,

$$y = \frac{u_1\, u_2\, u_3\, \dots\, u_m}{v_1\, v_2\, v_3\, \dots\, v_n} \text{ என்றால்,}$$

இங்கு, $u_1, u_2, \dots, u_m$ என்பனவும் $v_1, v_2, \dots, v_n$ என்பனவும் x-ன் சார்பலன்கள்.

இப்போது,

$$\log y = \log u_1 + \log u_2 + \dots + \log u_m - \log v_1 - \log v_2 - \dots - \log v_n.$$

எனவே,

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u_1}\cdot\frac{ud_1}{dx} + \frac{1}{u_2}\cdot\frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{1}{u_m}\cdot\frac{du_m}{dx} - \frac{1}{v_1}\cdot\frac{dv_1}{dx} - \frac{1}{v_2}\cdot\frac{dv_2}{dx} - \dots - \frac{1}{v_n}\cdot\frac{dv_n}{dx}\,.$$

இவ்வாறு ஒரு சார்பலனை வகைப்படுத்துவதற்கு முன்னால் அதை மடக்கையை உபயோகித்து எழுதிக்கொண்டால் பிறகு வகைப்படுத்துவது மிகவும் எளிதாகிறது. கடினமான சிக்கலான பெருக்கல், வகுத்தற் சார்பலன்களுக்கு வகைப்படுத்த இந்த மடக்கை முறை முக்கியமாக சிறந்த முறையில் உதவுகிறது.

மாதிரி

$$y = x^2 \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}.$$

$$\log y = \log (x^2) + \log \sqrt{(2x-1)} - \log \sqrt{x+1}.$$

$$= 2 \log x + \frac{1}{2} \log (2x-1) - \frac{1}{2} \log (x+1).$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{(8x^2 + 7x - 4)}{2x(x+1)(2x-1)}$$

எனவே,

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} \frac{(8x^2 + 7x - 4)}{2x(x+1)(2x-1)}$$

$$= \frac{x(8x^2 + 7x - 4)}{2(x+1)\sqrt{(x+1)(2x-1)}}$$

மாதிரி

$y = \dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$ என்றால் $\dfrac{dy}{dx}$-ன் மதிப்பைக் காண்.

$$\log y = \log x - \log (x+1) - \log (x+2)$$

இதை வகைப்படுத்தினால்

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{(x+1)(x+2) - x(x+2) - x(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2 + 3x + 2 - x^2 - 2x - x^2 - x}{x(x+1)(x+2)}$$

$$= -\frac{x^2 - 2}{x(x+1)(x+2)}$$

ஆகவே

$$\frac{dy}{dx} = -y. \quad \frac{x^2-2}{x(x+1)(x+2)} = -\frac{x^2-2)}{(x+1)^2\ (x+2)^2}.$$

ஒரு சார்பலனின் நெகிழ்ச்சி (Elasticity of a Function)

x மாறியானது x-லிருந்து $x+h$-க்கு கூடினுல், x, y-களில் காணப்படும் விகிதாச்சார மாறுதல்கள் முறையே,

$$\frac{h}{x},\ \frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே x-ல் ஒரு அலகு விகிதாசார மாறுதலுக்கான y-ன் சராசரி விகிதாசார மாறுதல்,

$$\frac{x}{f(x)} \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ ஆகும்.}$$

ஒரு சார்பலனின் வகைக்கெழு அமையப்பெறின், x-ல் விகிதாசார மாறுதல்களுக்கான y-ன் விகிதாசார மாறுதலின் விதமானது

$$\lim_{h \to 0}\left[\frac{x}{f(x)} \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$= \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

u, v என்பன x, y இவற்றின் மடக்கை என்ருல்,

$$u \log x \qquad v = \log y. \qquad \text{இங்கு} \quad y\, f(x).$$

$\frac{dv}{du}$ என்ற வகைக்கெழுவை கீழ்க்கண்டவாறு மூன்று வகைக்கெழுக்களின் பெருக்கலாக எழுதினுல்,

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du}$$

$$= \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot e^{u} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே x, y-களின் மாற்றங்களை விகிதசார முறைப்படிக் காட்டும்போது ஏற்படும் y-ன் மாற்ற வீதம் (rate of change)

$$\frac{d(\log y)}{d(\log x)} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

என்ற சமன்பாடுமூலம் அளவிடப்படுகிறது.

இந்த வீதத்தை x புள்ளியில் சார்பலனின் நெகிழ்ச்சி (Elasticity) என அழைக்கின்றோம். "E" குறியில் எழுதினால்

$$\frac{d(\log y)}{d(\log x)}$$

$$= \frac{Ey}{Ex} = \frac{E}{E(x)} f(x).$$

வரையறை

எனவே x புள்ளியில் $y = f(x)$ சார்பலனின் நெகிழ்ச்சியானது, x-ன் ஒரு அலகு விகிதசார மாற்றத்தின் வீதமேயாகும்.

$$\frac{Ev}{Ex} = \frac{d(\log y)}{d(\log x)} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

இந்த நெகிழ்ச்சியின் முக்கியமான பொதுப் பண்பு என்னவென்றால், அளவிடப்படும் மாறிகளின் அலகுகளைச் சார்ந்திராதவாறு இருக்கும் ஒரு எண்ணாகும் இந்த நெகிழ்ச்சி விகிதசார மாற்றங்களினால் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள இந்த நெகிழ்ச்சி அலகுகளினால் கட்டுப்படாத ஒரு எண் என்பது புலனாகிறது. அலகுகள் மாற்றப்பட்டால், x, y-களின் அளவுகள் x' y' என்றாலும், அதாவது $x = \lambda x$, $y'' = \mu y$ என்றாலும், நெகிழ்ச்சியின் அளவு மாறாது.

$$\frac{x'}{y'} \cdot \frac{dy'}{dx'} = \frac{\lambda x \cdot d(\mu y)}{\mu y \cdot d(\lambda x)} = \frac{\lambda\mu \cdot x}{\lambda\mu \cdot y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

எனவே நெகிழ்ச்சி, அலகு மாற்றத்தால், மாறுபடாது.

நெகிழ்ச்சிகளை மதிப்பிடுதல் (Evoluation of Elasticities)

ஒரு சார்பலனின் y-ன் வகைக்கெழு $\frac{dy}{dx}$-ஐ $\frac{x}{y}$ என்ற ஒரு பெருக்கற் காரணியுடன் சேர்ந்த மதிப்பே நெகிழ்ச்சி யாதலால், நெகிழ்ச்சியை மதிப்பிடுவதற்கு வகைக்கெழு மிக முக்கியமான

கண்டுபிடிக்கவேண்டிய தொன்றுகும். வகைக்கெழு நியதிகளைக் கொண்டு அமைந்த நெகிழ்ச்சி நியதிகளை கீழே எழுதுவோம்.

u, v என்பன x-ன் சார்பலன்களானுல்,

$$\text{(i)} \quad \frac{E(u+v)}{E(x)} = \frac{u \cdot \frac{Eu}{Ex} + v \cdot \frac{Ev}{Ex}}{u+v}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{E(u+v)}{Ex} = \frac{u \cdot \frac{Eu}{Ex} - v \cdot \frac{Ev}{Ex}}{u-v}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{E(uv)}{Ex} = \frac{Eu}{Ex} + \frac{Ev}{Ex}.$$

$$\text{(iv)} \quad \frac{E\left(\frac{u}{v}\right)}{Ex} - \frac{Eu}{Ex} - \frac{Ev}{Ex}.$$

இவை எப்படி அமைகின்றன எனப் பார்ப்போம்.

$$\text{(1)} \quad \frac{E(u+v)}{Ex} = \frac{d(\text{lag } u+v)}{d(\log x)}$$

$$= \frac{x}{u+v} \cdot \frac{d(u+v)}{dx}$$

$$= \frac{x \cdot \frac{du}{dx} + x \cdot \frac{dv}{dx}}{u+v}.$$

$$\frac{Eu}{Ex} = \frac{x}{u} \cdot \frac{du}{dx} \text{ எனவே } \frac{du}{dx} = \frac{u}{x} \cdot \frac{Eu}{Ex}$$

$$\frac{Ev}{Ex} = \frac{x}{v} \cdot \frac{dv}{dx}. \text{ ஆகவே } \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \cdot \frac{Ev}{Ex}$$

$$\text{எனவே } \frac{E(u+v)}{Ex} = \frac{x \cdot \frac{v}{x} \cdot \frac{Eu}{Ex} + x \cdot \frac{v}{x} \cdot \frac{Ev}{Ex}}{u+v}$$

$$= \frac{u \cdot \frac{Eu}{Ex} + v \cdot \frac{Ev}{Ex}}{u+v}.$$

ஆகவே நியதி (1) நிரூபணமானது.

இதுபோலவே நியதி (2)-ம் நிரூபிக்கப்படுகிறது.

இப்போது நியதி (3)-யைக் கவனிப்போம்.

$$\frac{E(uv)}{Ex}$$

$$= \frac{x}{uv} \cdot \frac{d(uv)}{dx} = \frac{x}{uv} \cdot \left[u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \right]$$

$$= \frac{x}{v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{x}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{Ev}{Ex} + \frac{Eu}{Ex} = \frac{Eu}{Ex} + \frac{Ev}{Ex}.$$

நியதி (4): $$\frac{E\left(\frac{u}{v}\right)}{Ex} = \frac{x}{\left(\frac{u}{v}\right)} \cdot \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{xv}{u} \cdot \frac{v \cdot \frac{u}{x} \frac{Eu}{Ex} - u \cdot \frac{v}{x} \cdot \frac{Ev}{Ex}}{v^2}$$

$$= \frac{xv}{u} \cdot \frac{uv}{x} \cdot \frac{1}{v^2} \frac{Eu}{Ex} - \frac{xv}{u} \cdot \frac{uv}{x} \cdot \frac{1}{v^2} \frac{Ev}{Ex}$$

$$= \frac{Eu}{Ex} - \frac{Ev}{Ex}$$ ஆகிறது.

இந்த நியதிகளிலிருந்து நெகிழ்ச்சியின் நியதிகளுக்கும் வகைக்கெழு நியதிகளுக்கும் உள்ள எளிய, கடின முறைகளைக் கவனித்தால், பெருக்கல், வகுத்தல்களுக்கான நெகிழ்ச்சி நியதிகள் சுலபமானவை ; ஆனால் இவற்றுக்கான வகைக்கெழு நியதிகள் நிரூபணம் சிறிது கடினம் ; மாறாக, கூட்டல், கழித்தல்களுக்கான நெகிழ்ச்சி நியதிகள் முன்னதை ஒப்பிடும்போது கடினம் ; ஆனால் இவற்றுக்கான வகைக்கெழு நியதிகள் சுலபமாக எழுதி விடலாம் என அறிகின்றோம். இது ஏன் என்றால் பெருக்கல். வகுத்தல் களில் நெகிழ்ச்சி நியதிகளுக்கு, மடக்கைகளை உபயோகப்படுத்தும் போது. மடக்கை நியதிகளை அடிப்படையாகக்கொண்டு பார்த்தால் இவை சுலபமாக எப்படி அடைகிறோம் என்று தெரியவரும். மேலும் ஒரு நிலை எண்ணின் நெகிழ்ச்சி பூஜ்யம் ஆகும்.

(i) $$\frac{E(u+a)}{Ex} = \frac{x}{u+a} \cdot \frac{d(u+a)}{dx} = \frac{x}{u+a} \cdot \frac{du}{dx}$$

(இங்கு a ஒரு நிலை எண்.

$$= \frac{x}{u+a} \cdot \frac{u}{x} \cdot \frac{Eu}{Ex} = \frac{u}{u+a} \cdot \frac{Eu}{Ex}.$$

(ii) $$\frac{E(ua)}{Ex} = \frac{x}{ua} \cdot \frac{d(ua)}{dx}$$

$$= \frac{x}{ua} \cdot a \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{x}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{Eu}{Ex}.$$

எனவே $\frac{E(ua)}{Ex} = \frac{Eu}{Ex}$ இங்கு x ஒரு நிலை எண்.

உதாரணமாக

$$\frac{E(px+q)}{Ex} = \frac{x}{px+q} \cdot \frac{d(px+q)}{dx}$$

$$= \frac{x}{px+q} \cdot (p+0)$$

$$= \frac{px}{px+q}.$$ இங்கு p, q நிலை எண்கள்.

(iii) $$\frac{E(cx^n)}{Ex} = \frac{x}{cx^n} \cdot \frac{d(cx^n)}{dx}$$

$$= \frac{x}{cx^n} \cdot c \cdot n \cdot x^{n-1} = n.$$

(iv) $$\frac{E}{Ex}(ae^{bx}) = \frac{x}{ae^{bx}} \cdot \frac{d(ae^{bx})}{dx}$$

$$= \frac{x}{ae^{bx}} \cdot a \cdot e^{bx} \cdot b.$$

$$= bx.$$

(ii)-லிருந்து அடுக்குச் சார்பலனின் (power function) நெகிழ்ச்சி ஒரு நிலை எண் என்றும், (i) மாதிரியிலிருந்து நேர்

கோட்டுச் சார்பலனின் (linear function) நெகிழ்ச்சி ஒரு நிலை எண் அல்ல என்றும் தெரிகிறது. n ஒரு நேர் நிலை எண் (positive constant) என்றால், நேர் நெகிழ்ச்சியைக்கொண்ட அந்த சமன்பாடு $y = cx^n$ ஆகிறது.

$(-n)$ என்ற எதிர்மறை நெகிழ்ச்சிக்கான சமன்பாடு $yx^n = c$ எனப்படும். குறிப்பாக $y = cx$ சமன்பாடு எல்லாப் புள்ளிகளிலும் 1 நெகிழ்ச்சியைக் கொண்டுள்ளது. $xy = c$ என்ற சமன்பாட்டின் நெகிழ்ச்சி $= -1$, எல்லாப் புள்ளிகளிலும்.

பொதுவாக, x-ன் மதிப்புக்குத் தக்கவாறு (வெவ்வேறு புள்ளிகளில்) ஒரு சார்பலனின் நெகிழ்ச்சி மாறுபடுகிறது. சில புள்ளிகளில் நெகிழ்ச்சி 1 இலக்கத்துக்குச் சமமாக உள்ளது. அப்புள்ளிகளைக் கவனித்தால், அதாவது ஏதாவது ஒரு x புள்ளியில் $\frac{E}{Ex} f(x) = 1$ என்றால், இப்தப் புள்ளியிலிருந்து x-ல் ஏற்படும் விகிதாசார ஏற்றமானது (proportional increase), $f(x)$-லும் ஒரு சமமான விகிதாசார ஏற்றத்தை உண்டாக்குகிறது எனலாம். ஆனால், $\frac{E}{Ex}[f(x)] > 1$ எனும்போது, x-ன் விகிதாசார ஏற்றமானது $f(x)$-ல் அதிகமான விகிதாசார ஏற்றத்தை உண்டாக்குகிறது. மறுதலையாக (conversels). x புள்ளியில் $\frac{E}{Ex} f(x) < 1$ என்ற சமயத்தில், $f(x)$-ன் விகிதாசார ஏற்றம் x-ன் விகிதாசார ஏற்றத்தைவிடக் குறைந்து காணப்படுகிறது. இதைப்போலவே, x புள்ளியில் $\frac{E}{Ex} f(x) = -1$ என்றால், x-ன் விகிதாசார ஏற்றம், y-ல் அதே அளவு விகிதாசார இறக்கத்தை உண்டாக்குகிறது.

$z_1 = x f(x)$ என்ற சார்பலனுக்கு

$$\frac{Ez_1}{Ex} = \frac{E\{x f(x)\}}{Ex}$$

$$= \frac{x}{x f(x)} \quad \frac{d[x f(x)]}{dx}$$

$$= \frac{x}{x f(x)} \cdot [1 . f(x) + x . f'(x)]$$

$$= 1 + \frac{x}{f(x)} f'(x)$$

$$= 1 + \frac{E[f(x)]}{E(x)} = \frac{E[f(x)]}{Ex} + 1$$

$$z_2 = \frac{f(x)}{x} \text{ என்ருல்}$$

$$\frac{Ez_2}{Ex} = \frac{E}{Ex}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \frac{x^2}{f(x)}\left[\frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}\right]$$

$$= \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} - 1 = \frac{E[f(x)]}{Ex} - 1$$

$[x f(x)]$ என்ற 'மொத்த' கோவை(expression)யின் மீச்சிறு அல்லது உச்சமதிப்பு (minimum or maximum value), $f(x)$-ன் நெகிழ்ச்சி, -1 என்று ஆகும்போது ஏற்படுகிறது. $\left[\frac{f(x)}{x}\right]$ என்ற 'சராசரி'க் கோவையின் மீச்சிறு அல்லது உச்ச x மதிப்பு, $f(x)$-ன் நெகிழ்ச்சி 1-க்குச் சமமாக இருக்கையில் ஏற்படுகிறது. எனவே x மாறியின் சார்பலன் $f(x)$ என்ருல் $f(x)$-ன் 'விளிம்பு' மதிப்பு (marginal value) $f'(x)$; $f(x)$-ன் 'சராசரி' மதிப்பு (average value) $\frac{f(x)}{x}$ என்பதால், அதன் விளிம்பு மதிப்புக்கும் சராசரி மதிப்புக்குமான விகிதம் (ratio)

$$\frac{f'(x)}{\left[\frac{f(x)}{x}\right]} = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{E f(x)}{Ex} \text{ என்பதால்,}$$

$f(x)$-ன் நெகிழ்ச்சி (x என்ற ஒரு புள்ளியில்) யானது, $f(x)$-ன் விளிம்பு மதிப்பு, சராசரி மதிப்புக்கான விகிதம் என்று விளங்குகிறது.

மாதிரிகள்

1. கீழ்க்கண்ட சார்பலன்களின் நெகிழ்ச்சியைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

(i) $y = xe^x$

(ii) $y = xe^{-x}$

(iii) $y = x^a e^{-b(x+c)}$

(i) $y = x\,e^x.$

$$\frac{dy}{dx} = x\,.\,(e^x) + e^x.\,(1) = e^x\,(x+1)$$

$y = f(x)$ சார்பலனின் நெகிழ்ச்சி

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{y}\,.\,\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{x}{x\,e^x}\,.\,e^x\,(x+1)$$

$$= \underline{x+1}$$

(ii) $y = x\,.\,e^{-x}.$

$$\frac{dy}{dx} = x\,.\,(-e^{-x}) + e^{-x}\,(1)$$

$$= e^{-x}\,(1-x).$$

$\therefore$ y-ன் நெகிழ்ச்சி $\dfrac{Ey}{Ex} = \dfrac{x}{y}\,.\,\dfrac{dy}{dx}$

$$= \frac{x}{x\,e^{-x}}\,.\,e^{-x}\,(1-x)$$

$$= \underline{1-x.}$$

(iii) $y = x^a\,.\,e^{-b\,(x+c}\,.$

$$\frac{dy}{dx} = x^a\,[\,-b\,e^{-b(x+c)}\,] + e^{-b(x+c)}\,.\,a\,.\,x^{a-1}$$

$$= x^{a-1}\,e^{-b(x+c)}\,,[a-bx]$$

y-ன் நெகிழ்ச்சி $\eta = \dfrac{x}{y}\,.\,\dfrac{dy}{dx}$

$$= \frac{x}{x^a\cdot e^{-b(x+c)}} = x^{a-1}\cdot e^{-b(x+c)}\,(a-bx)$$

$$\underline{= a - bx.}$$

மாதிரி 2

$f(x) = a\cdot x^{\alpha}$ சார்பலனின் நெகிழ்ச்சி α என்றால்

(i) $x\,.\,f(x)$

(ii) $\frac{f(x)}{x}$ இவற்றின் நெகிழ்ச்சிகள் முறையே $(\alpha + 1)$, $(\alpha - 1)$ என்று நிரூபிக்கவும்.

$$f(x) = a \cdot x^{\alpha}$$

$$x \cdot f(x) = a \cdot x^{\alpha + 1}.$$

$$\frac{d}{dx}[x\, f(x)] = \frac{d}{dx}\left[a \cdot x^{\alpha + 1}\right] = a \cdot (\alpha + 1) \cdot x^{\alpha}.$$

(i) $[x\, f(x)]$-ன் நெகிழ்ச்சி $= \frac{x}{x\, f(x)} \cdot a \cdot (\alpha + 1)\, x^{\alpha}$

$$= \frac{x}{x \cdot a \cdot x^{\alpha}} \cdot a \cdot (\alpha + 1)\, x^{\alpha}$$

$= \underline{\alpha + 1}$ நிரூபிக்கப்பட்டது.

$f(x)$-ன் நெகிழ்ச்சி $= \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{dy}{dx}$

$$= \frac{x}{a \cdot x^{\alpha}} \cdot a \cdot x^{\alpha - 1} \cdot \alpha \cdot = \alpha. \qquad (2)$$

(ii) $\left[\frac{f(x)}{x}\right]$-ன் நெகிழ்ச்சி $= \frac{x}{\left[\frac{f(x)}{x}\right]} \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \frac{x \cdot f'(x) - f(x) \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{x \cdot a \cdot \alpha \cdot x^{\alpha - 1} - a \cdot x^{\alpha}}{x^2}$$

$$= a \cdot (\alpha - 1)\, x^{\alpha - 2}.$$

$\therefore \left[\frac{f(x)}{x}\right]$-ன் நெகிழ்ச்சி

$$= \frac{x}{a \cdot x^{\alpha - 1}} \cdot a \cdot (\alpha - 1)\, x^{2 - \alpha}$$

$= \underline{\alpha - 1}$ நிரூபிக்கப்பட்டது.

பயிற்சிகள்

1. $y = e^{ax+b} \sin x$-ன் நெகிழ்ச்சியைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

2. மடக்கை வகைக்கெழு முறையை உபயோகித்து கீழ்க் கண்ட சார்பலன்களின் வகைக்கெழுவை மதிப்பிடுக.

(i) $y = x^2 (x - 1)^3$.

(ii) $y = x \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

3. (i) $y = e^{ax^2+bx+c}$

(ii) $y = (ax^2 + bx + c)\, e^x$ இந்த சார்பலன்களுக்கு மடக்கை மதிப்பை எடுத்துக்கொண்டு, பிறகு வகைக்கெழுக்களை கணக்கிடவும்.

4. $y = \dfrac{1}{3 + e^{x^2}}$ சார்பலனின் வகைக்கெழு $\dfrac{dy}{dx}$-ஐ முதலில் நேரடியாகக் கணக்கிடவும். பிறகு மடக்கை மதிப்பை பயன் படுத்தி $\dfrac{dy}{dx}$ கண்டுபிடித்து இரண்டு மதிப்புகளையும் ஒப்பிட்டுச் சரிபார்க்கவும்.

5. தேவைகளை கோடு $p = \sqrt{(9 - 2x)}$ என்ருல், $\dfrac{dp}{dx}$-ஐ முறையில் மடக்கை கண்டறியவும். பிறகு p, $\dfrac{dp}{dx}$ இவற்றின்மூலம் தேவை வளைகோட்டை வரையவும்.

6. $R = x \sqrt{9 - 2x}$ என்ற மொத்த வருவாய் வளைகோட்டைக் கொண்டு $R = 0$, $\dfrac{dR}{dx} = 0$ என்ற புள்ளிகளைக் கொண்டு R-ன் வளைகோடு வரையவும். $\dfrac{dR}{dx}$-ஐ மடக்கை முறையின்மூலம் கணிக்கவும். இங்கு x, R நேர் மதிப்புகளாகும்).

7. மொத்த வருவாய் வளைகோடு $R = x\sqrt{9 - x^2}$ என்ருல், $R = 0$, $\dfrac{dR}{dx} = 0$ என்ற புள்ளிகளைக் கொண்டு R-ன் வளைகோடு வரையவும். R சமன்பாட்டின் வகைக்கெழுவை "மடக்கை வகைக்கெழு" முறையின்மூலம் கணிக்கவும். (x, R நேர் மதிப்புகள்).

13. பொருளாதார நெகிழ்ச்சிகள்
(ECONOMIC ELASTICITIES)

தேவையின் நெகிழ்ச்சி (Demand Elasticity or Elasticity of Demand)

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளில், ஒரு பண்டத்தின் தேவை அளவு x-ஐ, $x = \phi(p)$, (இங்கு p என்பது பண்டத்தின் விலையைக் குறிக்கும்) என்ற p-ன் சார்பலனாகக் கொள்வோம். p-ன் இந்த சார்பலன் ஒரே ஒரு முறை இறங்கும் தன்மையுடைத்த (monotonic decreasing) சார்பலன். இதன் நெகிழ்ச்சியானது ஒரு கொடுக்கப்பட்ட விலையின், தேவையின் நெகிழ்ச்சியாகும். இங்கு p-ன் விகிதாசார ஏற்றம், x-ல் விகிதாசார இறக்கத்தைக் குறிக்குமாதலால், நெகிழ்ச்சியின் மதிப்பு எல்லா p புள்ளிகளிலும் எதிர் மறையில் இருக்கின்றதால், இதை நேர்மறையாக்குவதற்காக ஒரு எதிர்மறைக் குறியை (negative sign)ச் சேர்க்கிறோம். இப்படி வரையறையில், — குறி சேர்ப்பதால் நெகிழ்ச்சித் தத்துவம் பொருளுடைய முறையில் மாறுது.

எனவே,

$$\text{தேவையின் நெகிழ்ச்சி } \eta = -\frac{Ex}{Ep} = -\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp} \cdot = -\frac{d(\log x)}{d(\log p)}$$

அதாவது x மாறி, p-ன் இறங்கும் சார்பலனாதலால், $\frac{dx}{dp}$ ஒரு எதிர்மறை மதிப்புடையது. எனவேதான் $\eta = \frac{Ex}{Ep}$ என்று நேரடியாகக் குறிப்பிடுவதற்குப் பதிலாக ஒரு — குறியால் $\left[\frac{Ex}{Ep}\right]$ யைப் பெருக்கி $\eta = -\frac{Ex}{Ep}$ என்று அழைக்கின்றோம்.

η-ன் மதிப்பு x, p அலகுகளைச் சார்ந்திராவண்ணம், ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் மாறுபட்டு, விலையின் விகிதாசார ஏற்றத்துக்கான பண்டத்தின் அளவில் விகிதாசார இறக்கம் வீதத்தை அளவிட்டுக் கூறுகிறது.

உதாரணமாக ஒருபடித் தேவை வளைகோடு (linear demand curve). ஒரு நிலையான சரிவைக் கொண்டுள்ளது ; ஆனால் அதன் நெகிழ்ச்சி நிலையானதல்ல. தேவை அதிகரித்து விலை குறையும் போது, நெகிழ்ச்சியும் குறைவதைக் காணலாம்.

தேவையின் 'இயல்பான' நிபந்தனைகள் (Normal conditions of Demand)

X பண்டத்தின் அளவு x எனவும் ஓர் அலகின் விலை p எனவும் கொண்டால், தேவை நியதியை

$p = \psi(x)$ எனக் குறிப்போம்.

எனவே மொத்த வருவாய் (Total Revenue) $R = x \,.\, p.$

அதாவது $R = x \,.\, \psi(x)$ என்றால்

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}(xp)$$

$$= x \,.\, \frac{dp}{dx} + p \,.\, 1.$$

$$= p\left[1 + \frac{x}{p} \cdot \frac{dp}{dx}\right]$$

தேவையின் நெகிழ்ச்சி $\eta = -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp}$ என்பதால்

$$\frac{dR}{dx} = p\left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \text{ஆகிறது.}$$

இங்கு $\frac{dR}{dx}$-ஐ விளிம்பு வருவாய் (Marginal Revenue) என அழைக்கின்றோம். இதன் மதிப்பு $= p\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$. இதிலிருந்து சில முக்கிய விளைவுகளைக் கீழே விவரிப்போம்.

1. ஒரு பண்டத்தின் அளவு, விலை, தரப்பட்ட நிலையில் $\eta > 1$ என்றால், விலையில் ஒரு சிறிய இறக்கம் ஏற்பட்டால், தேவையில் விகிதாசார ஏற்றம் அதிகமாகிறது.

அதாவது $\eta > 1$ என்றால் $\frac{1}{\eta} < 1$

$$\therefore \quad 1 - \frac{1}{\eta} > 0$$

எனவே $\frac{dR}{dx}$ (ஒரு நேர்மறை மதிப்பாகிறது) மிகையாகிறது. எனவே தேவை கூடும்போது மொத்த வருவாயும் கூடுகிறது. ஆதலால் இது ஒரு நெகிழ்ச்சியான தேவை (elastic demand).

2. $\eta = 1$ என்றால், விலையில் சிறிய இறக்கமும், தேவையின் விகிதாசார ஏற்றமும் சமமாக இருக்கும். இங்கு விளிம்பு வருவாய் பூஜ்யம். மொத்த வருவாய் ஒரு நிலையான மதிப்பு (உச்ச அளவு) ஆகும்.

3. $\eta < 1$ என்றால், விலையில் சிறிய இறக்கம், தேவையில் விகிதாசார சிறிய இறக்கத்தைக் காட்டும். அப்போது விளிம்பு வருவாய் எதிர்மறையில் இருக்கும். இச்சமயத்தில் தேவை கூடும்போது மொத்த வருவாய் குறைவதைக் காணலாம். இயல்பான தேவையில், குறைந்த விலைகள் அதிகத் தேவைகளைச் சார்ந்து இருக்கின்றன. அதிக விலைகள் குறைந்த தேவைகளைச் சார்ந்துள்ளன. அதாவது தேவை வளைகோடு இடமிருந்து வலம் கீழ் நோக்கிச் சரிந்திருக்கும். தேவை கூடக்கூட, தேவையின் நெகிழ்ச்சி η என்பது, குறைந்த தேவைப்புள்ளிகளில் $\eta > 1$ -லிருந்து தொடர்ந்து குறைந்து வந்து, அதிக தேவைப் புள்ளிகளில் $\eta < 1$ அளவுக்கு தொடர்ச்சியாகக் குறைவதைக் காணலாம். தேவை கூடக்கூட, அது மிகவும் நெகிழ்ச்சியற்றதாகிறது.

தேவைகளின் இயல்பான நிலையில், மொத்த வருவாய் R முதலில் தேவை கூடும்போது கூடி அதாவது $\eta > 1$ பிறகு $\eta = 1$ எனும்போது $x = a$ தேவையில் உச்ச நிலையையடைந்து, பிறகு $\eta < 1$ என்ற நிலையில் தேவை மேலும் கூடும்போது குறைகிறது. சராசரி வருவாயோ, தேவை கூடக்கூட, தொடர்ச்சியாகக் குறைகிறது. முன்பு எழுதியது போல

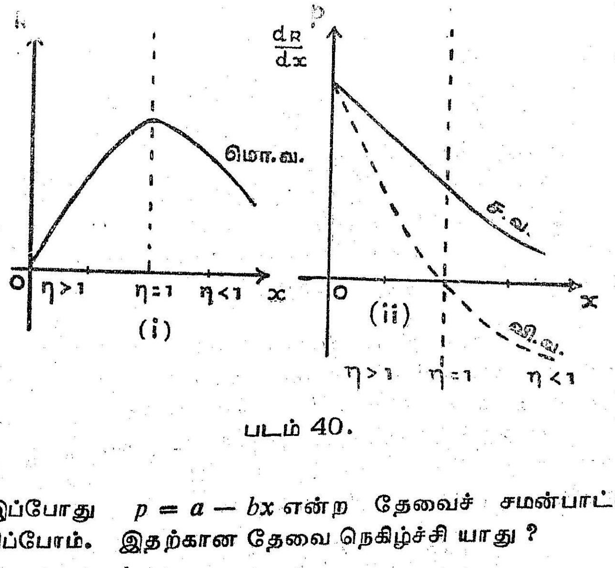
$$\frac{dR}{dx} = p.\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$$

இங்கு $\frac{dR}{dx}$ = விளிம்பு வருவாய்

$$p = \frac{R}{x} = \text{சராசரி வருவாய்}$$

எனவே விளிம்பு வருவாய் = சராசரி வருவாய் $\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$

$\eta > 0$ என்பதால் வி.வ. (M.R. = Marginal Revenue) ச. வ.(சராசரி வருவாய் = A.R. = (Average Rexenue) வை விட, எல்லாத் தேவைகளிலும், குறைவாக இருக்கிறது. $MR < AR$ மேலும் x கூடக்கூட, η குறைந்து $x = a$ புள்ளியில் 1-க்குச் சமமாகிறது. எனவே, a-க்கு குறைவான தேவைகளில் $\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$ நேர்மறை எண்ணுக இருந்து குறைகிறது. எனவே விளிம்பு வருவாய் தேவை x கூடக்கூட, குறைந்து வந்து $x = a$ புள்ளியில் அதாவது $\eta = 1$ எனும்போது, பூஜ்யம் ஆகிறது. இதற்கு மேற்பட்ட அதிகத்தேவைகளில், விளிம்பு வருவாய் எதிர்மறை மதிப்புடையது; ஆனால் தொடர்ந்து குறைய வேண்டிய அவசியமில்லை. மொத்த சராசரி, விளிம்பு வருவாய்களின் இயல்பான தோற்றங்களைக் கீழே வரையப்பட்ட படங்கள் நன்கு விளக்குகின்றன.



படம் 40.

மாதிரி

இப்போது $p = a - bx$ என்ற தேவைச் சமன்பாட்டைக் கவனிப்போம். இதற்கான தேவை நெகிழ்ச்சி யாது ?

$$\frac{dp}{dx} = -b$$

தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta = -\dfrac{p}{x} \cdot \dfrac{dx}{dp}$

$$= -\frac{a-bx}{x} \cdot \left(-\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{b}\left(\frac{a}{x} - b\right)$$

x கூடும் போது η தொடர்ச்சியாகக் குறைகிறது. இங்கு தேவை யான இயல்பான நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு உள்ளது என்றும் அறிகிறோம்.

மாதிரி 2

$p = \dfrac{a}{x+b} - c$ என்ற தேவை நியதியை எடுத்துக்கொண்டு அதன் நெகிழ்ச்சியைக் கணிப்போம்.

$$p = \frac{a - bc - cx}{(x+b)}$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{a}{(x+b)^2}.$$

தேவையின் நெகிழ்ச்சி $\eta = -\dfrac{p}{x} \cdot \dfrac{dx}{dp}$

$$= \cdot\frac{p}{x} \cdot \frac{(x+b)^2}{a}$$

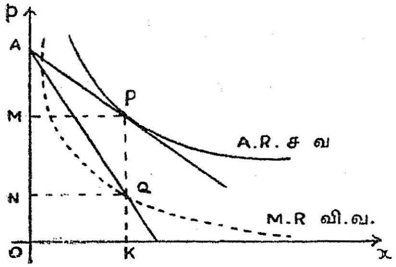
$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{a - bc - dx}{x(x+b)} (x+b)^2$$

$$= \frac{1}{u} (a - bc - cx) \frac{(x+b)}{x}$$

$$= \frac{1}{a} \left(1 + \frac{b}{x}\right)(a - bc - cx).$$

இங்கும் x கூடும்போது, η தொடர்ந்து குறைகிறது. இப்போது சராசரி வருவாய் வளைகோடு, விளிம்பு வருவாய் வளைகோடு இவற்றிற்கான ஒரு தொடர்பை இங்கு காண்போம்.

சராசரி வருவாய் வளை கோட்டில் P புள்ளியில் உள்ள தொடுகோடு (tangent) விலை அச்சை (price axis) A புள்ளியில் வெட்டினால், A-லிருந்து Q என்ற விளிம்பு வருவாய் வளைகோட்டுப் புள்ளியின் வழியாக, ஒரு நேர்கோடு வரைக. P அல்லது Q புள்ளியில் x-ன் மதிப்பு ஒன்றாக உள்ளது.



படம் 41.

AP-ன் சரிவு, AQ-ன் சரிவைப்போல இரு மடங்காக இருக்கும். PM, QN என்பன விலை அச்சுக்குச் செங்குத்தான கோடுகள். X அச்சுக்கு இணையானவை. P என்ற புள்ளியில் η மதிப்பு

$$\eta = + \frac{p}{x} \left(- \frac{dx}{dp} \right)$$

$$= \frac{OM}{OK} \cdot \frac{MP}{AM} = \frac{OM}{MP} \cdot \frac{MP}{MA} = \frac{OM}{MA} = \frac{p}{MA}$$

எனவே $MA = \frac{p}{\eta}$

விளிம்பு வருவாய் = சராசரி வருவாய் $\left(1 - \frac{1}{\eta} \right)$ என்பதால்

$$ON = OM \left(1 - \frac{1}{\eta} \right)$$

$$NM = OM - ON = \frac{OM}{\eta} = \frac{p}{\eta}.$$

$$\therefore \quad MA = NM = \frac{1}{2} NA$$

எனவே,

விலை அச்சுக்கு AP-ன் சரிவு $= \frac{MP}{MA} = \frac{NQ}{\frac{1}{2} NA} = 2 \frac{NQ}{NA}$

இது விலை அச்சுக்கு AQ சரிவின் 2 மடங்காகும்.

இந்த விளைவைக் கொண்டு, ஒரு தேவை வளைகோடு (சராசரி வருமான வளைகோடு) கொடுக்கப்பட்டால், விளிம்பு

வருவாய் வளைகோட்டை வரைய முடியும். எப்படி என்றால், P என்ற ஏதாவது ஒரு புள்ளியை தேவை வளைகோட்டில் எடுத்துக் கொண்டு விலை அச்சுக்கு ஒரு தொடுகோடு வரைந்தால் A-ல் அது வெட்டும். AP சரிவில் பாதி சரிவு இருக்குமாறு A-ன் வழியாக AQ கோடு வரையவும். P-க்கு நேரே X அச்சுக்கு ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைந்தால் அது ஒரே அளவு X தேவையைக் காட்டும் கோடாகும். அந்தக் கோட்டில் AQ கோடு வெட்டும் புள்ளிதான் Q. இவ்வாறு P-ஐப் போல மற்ற பல புள்ளிகள் எடுத்து இதுபோல Q புள்ளிகளைக் கண்டுபிடித்தால் Q புள்ளிகளின் தொகுப்பே விளிம்பு வருவாய் வளைகோடு ஆகும். ஏனெனில் Q புள்ளி விளிம்பு வருவாய் வளைகோட்டில் அமைந்த புள்ளியாகும். இவ்வாறு விளிம்பு வருவாய் வளைகோடு வரையலாம்.

மாதிரி

தேவைச் சமன்பாடு $x = 18 - 2p^2$ என்றால் $(p = 2,\ x = 10)$ என்ற புள்ளியில் தேவையின் நெகிழ்ச்சியைக் கணக்கிடவும்.

$$x = 18 - 2p^2.$$

$$\frac{dx}{dp} = -4p.$$

தேவையின் நெகிழ்ச்சி

$$\eta = -\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp} = \frac{p}{x} \cdot \left(-\frac{dx}{dp}\right)$$

$$= \frac{p}{x} \cdot (4p) = \frac{4p^2}{x}.$$

$$x = 18 - 2p^2$$

$$2p^2 = 18 - x$$

$$4p^2 = 36 - 2x.$$

எனவே $\eta = \dfrac{4p^2}{x} = \dfrac{2(18 - x)}{x} = \dfrac{36 - 2x}{x}$

இப்போது $x = 10$ என்ற புள்ளியில் தேவையின் நெகிழ்ச்சி

$$\eta = \frac{36 - 2(10)}{10}$$

$$= \frac{16}{10} = \underline{1{\cdot}60.}$$

இங்கு $\eta > 1$ என்பதால் தேவை ஒரு நெகிழ்ச்சியான தேவை (elastic demand) எனக் கூறுகிறோம்.

மாதிரி

தேவைச் சமன்பாடு, $0 \leqslant x \leqslant 6$ இடைவெளியில் கீழ்க் கண்டவாறு தரப்பட்டுள்ளது.

$$p = \frac{8}{2+x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 6.$$

இடைவெளியின் கடை நிலைகளில் (end points of the interval) தேவை நெகிழ்ச்சியைக் கண்டுபிடித்து தேவை வளை கோட்டை வரைக.

$$x = 0 \quad p = \frac{8}{2} = 4.$$

$$x = 6 \quad p = \frac{8}{8} = 1.$$

எனவே கடைநிலைப் புள்ளிகள் $(0, 4)$, $(6, 1)$ ஆகும் இப்போது தேவையின் நெகிழ்ச்சியைக் கண்டுபிடிப்போம்.

$$\text{தேவையின் நெகிழ்ச்சி } \eta = \left(-\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}\right)$$

$$= \frac{p}{x} \cdot \left(-\frac{dx}{dp}\right)$$

$$p = \frac{8}{2+x}.$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8}{(2+x)^2}$$

$$\text{எனவே } \eta = \frac{p}{x} \cdot \left[\frac{(2+x)^2}{8}\right]$$

$$= \frac{(2+x)^2}{8} \cdot \frac{8}{(2+x)} \cdot \frac{1}{x}$$

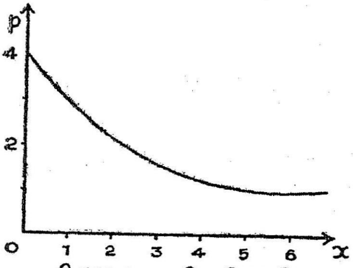
$$= \frac{2+x}{x} = 1 + \frac{2}{x}.$$

இப்போது

$$x = 0 \text{ என்ற புள்ளியில் } \eta = 1 + \frac{2}{0} = +\infty$$

$$x = 6 \text{ என்ற புள்ளியில் } \eta = 1 + \frac{2}{6} = 1 + \frac{1}{3} = 1 \cdot 33$$

தேவை வளைகோட்டை இப்போது கீழே வரையலாம்.



தேவை வளைகோடு

படம் 42.

இங்கு

$x = 0$ என்றால் $p = 4$

$x = 1$ என்றால் $p = 2 \cdot 7$

$x = 2$ என்றால் $p = 2$

$x = 4$ என்றால் $p = 1 \cdot 33$

$x = 6$ என்றால் $p = 1$.

இப் புள்ளிகளில் வளை கோடு வரையப்பட்டது.

மாதிரி

தேவை நியதி $x = \frac{27}{p^3}$, $\left(\frac{1}{8} \leqslant x \leqslant 8\right)$ இடைவெளியில் என்றால், $x = 2$, $x = 5$ புள்ளிகளில் தேவை நெகிழ்ச்சியைக் கணக்கிடவும்.

$$x = \frac{27}{p^3}.$$

$$\frac{dx}{dp} = 27\,(-3)\,p^{-4}.$$

$$= \frac{-81}{p^4}.$$

$$\text{தேவையின் நெகிழ்ச்சி } \eta = \frac{p}{x}\left(-\frac{dx}{dp}\right)$$

$$= \frac{p}{x} \cdot \frac{81}{p^4}$$

$$= \frac{p}{27} \cdot p^3 \cdot \frac{81}{p^4}$$

$$= 3.$$

எனவே $x = 2$, $x=5$ புள்ளிகளில் $\eta=3$ என்ற ஒரே அளவு நிலை எண்ணுகும்.

இங்கு தேவைச் சார்பலன் விலையின் அநேக்குச் சாரபலனுகும்.

மாதிரி

எந்த ஒரு (புள்ளியிலும்) தேவையிலும், $A.R.$, $M.R.$ என்பன முறையே சராசரி வருவாய், விளிம்பு வருவாய் என்றால், தேவையின் நெகிழ்ச்சி

$$\eta = \frac{A.R.}{A.R. - M.R.}$$ என நிரூபித்துக் காட்டு.

x, p என்பன முறையே பொருளின் அளவு, விலை என்றால் $T.R.$ மொத்த வருவாய் $R = x . p$.

$$AR = \text{சராசரி வருவாய் } p = \frac{R}{x}$$

விளிம்பு வருவாய் $MR = \frac{dR}{dx}$ என நாம் அறிவோம்.

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}(xp)$$

$$= \left(x . \frac{dp}{dx} + p . 1\right) = p + x . \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dR}{dx} = p. \left(1 + \frac{x}{p} . \frac{dp}{dx}\right).$$

η = தேவையின் நெகிழ்ச்சி

$= -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp}$ என்பது வரையறையாகும்.

எனவே $\frac{dR}{dx} = M . R = p\left[1 - \frac{1}{\eta}\right]$ ஆகும்.

மேலும் $p = A. R$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \ M.R. = A.R.\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$$

$$A.R. - M.R. = \frac{1}{\eta} AR$$

அல்லது $\eta = \frac{A.R.}{A.R. - M.R.}$ நிரூபணமாகியது.

மாதிரி

$p = \sqrt{a - bx}$ தேவைச் சமன்பாட்டுக்கான தேவை நெகிழ்ச்சியைக் கண்டுபிடித்து x கூடக்கூட, η குறைகிறது என்று நிரூபி. எப்போது $\eta = 1$ ஆகும்?

$$p = \sqrt{a - bx}.$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a - bx}} \times (-b)$$

தேவையின் நெகிழ்ச்சி $\eta = \frac{p}{x}\left(-\frac{dx}{dp}\right)$

$$= \frac{p}{x} \cdot \frac{2\sqrt{a - bx}}{b}$$

$$= \frac{2\sqrt{a - bx}}{bx} \cdot \frac{\sqrt{a - bx}}{1}$$

$$= 2\,\frac{a - bx}{bx}$$

$$= 2\left(\frac{a}{bx} - 1\right).$$

$$\eta = 2 \cdot \left(\frac{a}{bx} - 1\right)$$

இப்போது x அதிகரிக்க அதிகரிக்க $\frac{a}{bx}$ குறைகிறது. $a = 2$, $b = 3$ என்று எதேச்சை மதிப்புகள் ஆனால்,

$$\eta = 2\left(\frac{2}{3x} - 1\right)$$

இப்போது,

$$x = 1 \text{ என்றால் } \eta = 2\left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3}$$

$$x = 2 \text{ என்றால் } \eta = 2\left(\frac{2}{6} - 1\right) = -\frac{4}{3}$$

$$x = 5 \text{ என்றால் } \eta = 2\left(\frac{2}{15} - 1\right) = -\frac{26}{15}$$

இவ்வாறு η-ன் மதிப்பு குறைகிறது.

இதேபோல $a = 20$, $b = 10$ என்றால்,

$$\eta = 2\left(\frac{20}{10x} - 1\right)$$

$$x = 1 \quad \eta = 2$$

$$x = 2 \quad \eta = 0$$

$$x = 3 \quad \eta = -\frac{2}{3}$$

இவ்வாறு η குறைகிறது.

இப்போது $\eta = 1$ என்றால்,

$$2\left(\frac{a}{bx} - 1\right) = 1$$

$$\frac{a}{bx} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{bx} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$3bx = 2a$$

$$x = \frac{2a}{3b}$$

எனவே x-ன் மதிப்பு $\frac{2a}{3b}$-க்குச் சமமாக இருக்கும்போது $\eta = 1$ ஆக இருக்கும்.

தேவையின் நெகிழ்ச்சி

1. தேவை நியதி $x = \frac{20}{p+1}$ என்றால், $p = 3$ என்ற மதிப்பில் தேவையின் நெகிழ்ச்சியைக் கண்டுபிடி. துல்லிதமான ஒரு தேவை வளைகோட்டினை வரைந்து. $p = 3$ என்ற P புள்ளியில் ஒரு தொடுகோடு வரைக. அச்சுக்களை அது சந்திக்கும் M, N புள்ளிகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

2. தேவை வளைகோடுகள்

(i) $p = (a - bx)^2$

(ii) $p = a - bx^2$ என்றால்

இவை ஒவ்வொன்றின் நெகிழ்ச்சி யாது? x அளவு கூடும்போது, η மதிப்பு குறைகிறது என்று நிரூபி. எப்போது $\eta = 1$ ஆகும். (ஒவ்வொரு வளைகோட்டிற்கும்) என்று நிரூபித்துக் காட்டு.

(சென்னை, ஏப்ரல் '68)

3. தேவை நியதி $x = a \cdot e^{-bp}$, (a, b நிலை எண்கள்) என்றால் தேவையின் நெகிழ்ச்சி, மொத்த, சராசரி, விளிம்பு வருவாய் வளைகோடுகளையும் கண்டுபிடிக்கவும். இவை யாவற்றையும் x-ன் சார்பலன்களாகக் காட்டவும். தேவையானது ஒரு இயல்பான வடிவத்தில் உள்ளது என நிரூபி. எந்த x அளவில் மொத்த வருவாய் உச்ச அளவை எட்டும்?

4. $x = p^a e^{-b(p+c)}$ என்ற தேவை வளைகோட்டில், விலை குறையும்போது, தேவை கூடும்; விலை $\frac{a}{b}$ மதிப்பை அடையும் போது தேவை மிக அதிக அளவை அடைகிறது என நிரூபி. விலை $\frac{a}{b}$-க்கு அதிகமான நிலையில் தேவையின் நெகிழ்ச்சி என்னவாக இருக்கும்? தேவை ஒரு இயல்பான வடிவில் உள்ளதா?

5. தேவை வளைகோடு $p = (x - 6)^2$, $0 \leqslant x \leqslant 6$ இடைவெளியில், என்றால் தேவையின் நெகிழ்ச்சியைக் கணக்கிட்டு $x = 3$, $x = 6$ என்ற புள்ளிகளில் அதன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

6. (a) தேவை நியதி $p = 10\, e^{-\frac{x}{2}}$ என்றால், இந்தத் தேவையின் நெகிழ்ச்சி யாது?

(b) $p = k_1 e^{-k_2 x}$ என்றால் தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta = -\frac{1}{k_2 x}$ என்று நிரூபித்துக் காட்டு.

7. தேவை நியதியைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதினல்,

$x = 16 - 8 \log x$ என்ருல்,

இந்தத் தேவையின் நெகிழ்ச்சியைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

செலவு நெகிழ்ச்சியும், இயல்பான செலவு நிபந்தனைகளும் (Cost Elasticity and Normal Cost conditions)

நெகிழ்ச்சித் தத்துவம், செலவுப் பிரச்சினையைப் பற்றிய ஆய்வுகளில் மிகவும் அதிகமாகப் பயன்படக் கூடிய தொன்ருகும். முன்பு விளக்கிக் கூறப்பட்ட தேவையின் நெகிழ்ச்சியிலிருந்து இது முற்றிலும் மாறுபட்டதாகும். தேவை நெகிழ்ச்சி சராசரி மதிப்பை (சராசரி வருவாய்)ப் பற்றியது. அங்கு η என்ற அளவு 1-க்குத் தொடர்பு வைத்து மொத்த மதிப்பு (மொத்த வருவாய்) கூடுகிறதா அல்லது குறைகிறதா என்று தீர்மானித்தோம். ஆனல் செலவுப் பிரச்சினையில் அத்தகைய நிலை இல்லை. இங்கு எல்லா x (மதிப்பு) உற்பத்திகளிலும் மொத்த மதிப்பு (மொத்த செலவு) கூடுகிறது. அதன் நெகிழ்ச்சி கண்டுபிடிக்கப்பட்டு சராசரி மதிப்புகளுக்கான (சராசரி செலவு) பொதுப் பண்புகள் விளக்கமாக கண்டுபிடிக்கப் படுகின்றன.

ஒரு நிறுவனம் x உற்பத்தியைத் தயாரிப்பதற்கு ஆகும் மொத்தச் செலவு $\Pi = F(x)$ எனக் கொள்வோம். இப்போது மொத்தச் செலவின் நெகிழ்ச்சியை K என்று குறிப்பிட்டால்,

$$K = \frac{x}{\Pi} \cdot \frac{d\Pi}{dx} = \frac{d(\log \Pi)}{d(\log x)}.$$

செலவு, உற்பத்தி இரண்டு அலகுகளையும் சார்ந்திராமல் K-ன் மதிப்பு உள்ளது.

உற்பத்தி x-ன் விகிதாசார ஏற்றத்துக்கான மொத்தச் செலவின் விகிதாசார ஏற்றத்தின் வீதமே (rate of Proportional increase) மொத்தச் செலவின் நெகிழ்ச்சியாகும்.

$$K = \frac{x}{\Pi} \cdot \frac{d\Pi}{dx} = \frac{d\Pi/dx}{\Pi/x} = \frac{M \cdot C}{A \cdot C} = \frac{\text{வி.செ.}}{\text{ச.செ.}}$$

K-ன் வரையறையிலிருந்து K என்பது விளிம்புச் செலவு சராசரிச் செலவு இவற்றுக்கான வீதம்.

அதாவது $K = \dfrac{\text{விளிம்புச் செலவு}}{\text{சராசரிச் செலவு}}$

எனவே மொத்தச் செலவின் நெகிழ்ச்சி $= \frac{\text{விளிம்புச் செலவு}}{\text{சராசரிச் செலவு}}$.

சராசரிச் செலவு $\pi = \frac{\Pi}{x}$ என்று நாம் அறிவோம். இப்போது இந்த

சராசரிச் செலவின் நெகிழ்ச்சி $= \frac{x}{\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx}$

$$= \frac{x}{\left(\frac{\Pi}{x}\right)} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\Pi}{x}\right)$$

$$= \frac{x^2}{\Pi} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\Pi}{x}\right)$$

$$= \frac{x^2}{\Pi} \cdot \frac{\left(x \cdot \frac{d\Pi}{dx} - \Pi \cdot 1\right)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{\Pi}\left[x \cdot \frac{d\Pi}{dx} - \Pi\right]$$

$$= \frac{x}{\Pi} \quad \frac{d\Pi}{dx} - 1$$

$$= K - 1.$$

ஆகவே மொத்தச் செலவின் நெகிழ்ச்சி K என்றால் சராசரிச் செலவின் நெகிழ்ச்சி $K-1$ ஆகிறது. இதன் மூலம் கீழ்க்கண்ட விளைவுகளைக் காண்கிறோம்.

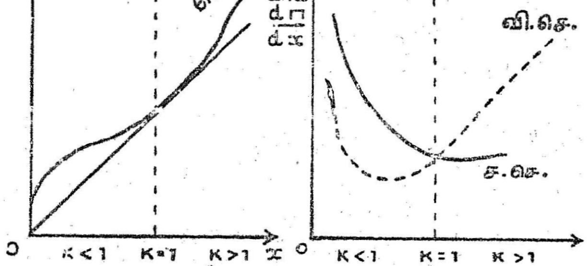
1. ஒரு கொடுக்கப்பட்ட உற்பத்தியில் $K < 1$ என்றால், ஒரு "வளர்ந்து செல் விளைவு" (increasing returns) ஏற்படுகிறது. அதாவது செலவின் விகிதாசார ஏற்றமானது உற்பத்தியின் விகிதாசார ஏற்றத்தை அதிகரிக்கிறது. இங்கு சராசரிச் செலவு விளிம்புச் செலவைவிட அதிகம். x உற்பத்தி கூடக்கூட, சராசரிச் செலவு குறைகிறது.

2. $K = 1$ என்றால், நிலையான விளைவு (constant returns) நிகழ்கிறது. அதாவது உற்பத்தியின் சிறிய விகிதாசார ஏற்றம், செலவிலும் (அதே சரியான) சமமான விகிதாசார ஏற்றத்தை உண்டாக்குகிறது. இங்கு சராசரி செலவும் விளிம்புச் செலவும் சமமாக உள்ளது. மேலும் சராசரி செலவு ஒரு நிலையான (வழக்கமாக ஒரு மீச்சிறு) மதிப்பை அடைகிறது.

3. $K > 1$ என்ருல், ஒரு "குறைந்து செல் விளைவு" (decreasing returns) நிகழ்கிறது. $K < 1$ என்றபோது இருந்த சூழ்நிலைக்கு எதிர்மாருன சூழ்நிலை இங்கு இருக்கும். இயல்பான செலவு நிபந்தனைகள்: பொதுச்செலவுகள் (overhead costs) உற்பத்தி ஆரம்பிக்கும் முன்னர், இருக்குமாதலால் மொத்தச் செலவு, ஒரு நேர் எண்ணிலிருந்து ஆரம்பித்து தொடர்ச்சியாகக் கூடிவரும். அதாவது x பூஜ்யத்திலிருந்து கூடக்கூட, மொத்தச் செலவும் கூடுகிறது. இயல்யான செலவு நிபந்தனைகளில் மற்றும் ஒரு முக்கியமான பண்பு என்னவென்ருல், செலவின் நெகிழ்ச்சி 1-க்கு குறைவான மதிப்பிலிருந்து (அதாவது குறைந்து உற்பத்தியில்) கூட ஆரம்பித்து, அதிக உற்பத்தியில், Kயானது 1-க்கு அதிகமான மதிப்புவரை கூடுகிறது. உற்பத்தி கூடும்போது, விளைவு மிகவும் பாதகமாக (unfavourable) உள்ளன. $x = a$ என்ற உற்பத்தியில் $K = 1$ ஆகிறது என்ருல் அச்சமயத்தில் விளைவுகள் கூடுவது தடைபட்டு குறைவதற்கு ஆரம்பிக்கின்றன.

இயல்பான முறையில், சராசரிச் செலவு முதலில் x கூடும்போது குறைகிறது. $x = a$ எனும்போது மீச்சிறு மதிப்பை அடைகிறது. உற்பத்தி x மேலும் கூடுகையில், சராசரிச் செலவு கூடுகிறது.

விளிம்புச் செலவு, a-க்குக் குறைவான உற்பத்தியில் சராசரி செலவுக்குக் குறைவாக உள்ளது; a-க்கு அதிகமான உற்பத்தியில் சராசரிச் செலவுக்கு அதிகமாக உள்ளது. $x = a$ எனும்போது, விளிம்புச் செலவு கூடி மீச்சிறு சராசரிச் செலவுக்குச் சமமாகிறது.



படம் 43.

மொ. செ. = மொத்தச் செலவு வளைகோடு.
வி. செ. = விளிம்புச் செலவு வளைகோடு.
ச. செ. = சராசரிச் செலவு வளைகோடு.

மொத்த, சராசரி விளிம்புச் செலவு வளைகோடுகளின் இயல்பான வடிவங்கள் முன்பக்கப் படங்களின் மூலம் விளக்கப்பட்டுள்ளன.

இயல்பான செலவு நிபந்தனைகளுக்குட்பட்ட ஒரு எளிதான செலவுச் சார்பலன்

$\Pi = ax^2 + bx + c$ என்ற இருபடிச் சமன்பாடாகும். இங்கு a, b, c என்பன நேர்நிலை எண்கள். மொத்தச் செலவின் நெகிழ்ச்சி

$$K = \frac{\Pi}{x} \cdot \frac{d\Pi}{dx}.$$

$$\pi \frac{\Pi}{x} = \frac{ax^2 + bx + c}{x}$$

$$\frac{d\Pi}{dx} = 2ax + b.$$

எனவே $K = \frac{(2ax + b)\,x}{ax^2 + bx + c} = \frac{2ax^2 + bx}{ax^2+bx+c}$

x கூடும்போது K-ம் கூடுகிறது.

மாதிரி

$$\Pi = ax^3 - bx^2 + cx + d$$

a, b, c, d என்பன நேர் நிலை எண்கள்; $(b^2 < 3ac)$.

$$\pi = \frac{\Pi}{x} = ax^2 - bx + c + \frac{d}{x} \text{ சராசரிச் செலவு}$$

$$\frac{d\Pi}{dx} = 3ax^2 - 2bx + c.$$

மேலும் $\frac{d^2\Pi}{dx^2} = 6ax - 2b.$

$b^2 < 3ac$ என்பதால், எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் $\frac{d\Pi}{dx}$ ஒரு நேர்மறை மதிப்பாகும்.

மேலும் $\frac{d^2\Pi}{dx^2} = 0$, $x = \frac{b}{3a}$ என்ற மதிப்பில் என்பதாலும் மொத்தச் செலவுச் சார்பலன் உயர்ந்து செல்லும் சார்பலன்.

ஆனால் $x = \frac{b}{3a}$-ல் ஒரு வளைவு மாறி புள்ளியை (point of inflexiom)ப் பெற்றுள்ளது.

சராசரிச் செலவு வளைகோடு

$$\pi = ax^2 - bx + c + \frac{d}{x}$$

$$\frac{d\pi}{dx} = 2axy - b - \frac{d}{x^2}$$

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = 2a + \frac{2d}{x^3}.$$

$\frac{b}{3a}$-க்கு அதிகமான x மதிப்பில் சராசரி செலவுக் கோடு ஒரு மீச்சிறு மதிப்பைப் பெற்றுள்ளது.

விளிம்புச் செலவு வளைகோடு ஒரு பரவளைவு கோடாகும்.

$x = \frac{b}{3a}$ எனும்போது

$$\frac{d\Pi}{dx} = 3a \cdot \frac{b^2}{9a^2} - 2b \cdot \frac{b}{3a} + c.$$

$$= \frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c = c - \frac{b^2}{3a} = \frac{3ac - b^2}{3a}.$$

மாதிரி

ஒரு நிறுவனம் x உற்பத்தியைத் தயாரிக்க ஆன மொத்த செலவு $\Pi = ax^2 + bx$ என்றால், மொத்த செலவின் நெகிழ்ச்சி K-ஐக் கண்டுபிடித்து, K எப்போதும் 1-க்கும் அதிகமாக உள்ளது என்றும் x கூடும்போது அதுவும் கூடுகிறது என்றும் நிரூபிக்கவும்.

$$\Pi = ax^2 + bx.$$

மொத்த செலவின் நெகிழ்ச்சி

$$= K = \frac{x}{\Pi} \cdot \frac{d\Pi}{dx} = \frac{\text{விளிம்புச் செலவு}}{\text{சராசரிச் செலவு}}$$

$$\text{விளிம்புச் செலவு} = \frac{d\Pi}{dx} = 2ax + b.$$

$$\text{சராசரிச் செலவு} = \frac{\Pi}{x} = \frac{2x^2 + bx}{x} = ax + b.$$

$$\text{எனவே } K = \frac{\text{வி. செ.}}{\text{ச. செ.}} = \frac{2ax + b}{ax + b} = \frac{ax + b + x}{ax + b}$$

$$= 1 + \frac{ax}{bx + b}.$$

a, b என்பன நேர் நிலை எண்கள் ; x ஒரு நேர் மதிப்பு. எனவே $K > 1$ என்பது புலனாகிறது.

மேலும் x கூடும்போது $\frac{ax}{ax + b} > 0$.

அதே சமயத்தில் $\frac{ax}{ax + b} < 1$.

எனவே x கூடும்போது $K > 1$ ஆனால் $K > 2$.

$\therefore$ x கூடும்போது K கூடுகிறது.

மாதிரி

$\Pi = \sqrt{ax + b}$ என்றால் K = மொத்தச் செலவின் நெகிழ்ச்சியானது x கூடும்போது கூடுகிறது. ஆனால் $K < 1$ என்று நிரூபிக்கவும்.

$$\Pi = \sqrt{ax + b}$$

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{ax + b}}. \qquad \pi = \frac{\Pi}{x} = \frac{\sqrt{ax + b}}{x}.$$

$$\text{எனவே } K = \frac{\text{வி.செ.}}{\text{ச.செ.}} = \frac{a}{2\sqrt{(ax + b)}} \times \frac{xa}{\sqrt{ax + b}}$$

$$= \frac{ax}{2(ax + b)}$$

a, b நேர்நிலை எண்கள் ; x நேர் மதிப்பு. எனவே $K > 0$ ஆகும். மேலும் $K < 1$ ஆகிறது.

அத்துடன் x கூடும்போது K கூடுகிறது.

$x = x_1$ என்ருல் $K_1 = \dfrac{ax_1}{2(ax_1 + b)}$

$x = x_2$ என்ருல் அதாவது $x_2 > x_1$ எனும்போது,

$$K_2 = \frac{ax_2}{2(ax_2 + b)};$$

$K_2 > K_1$ என்ருல் K கூடுகிறது என்று பொருள்.

இப்போது $K_2 > K_1$ என்ருல்

$$\frac{ax_2}{2(ax_2 + b)} > \frac{ax_1}{2(ax_1 + b)}$$

$$(ax_1 + b)x_2 > x_1(ax_2 + b)$$

அதாவது $ax_1x_2 + bx_2 > ax_1x_2 + bx_1$

அதாவது $x_2 > x_1$

நாம் $x_2 > x_1$ என்று ஏற்கெனவே அறிந்ததே.

எனவே $K_2 > K_1$.

∴ மொத்தச் செலவின் நெகிழ்ச்சி x உடன் கூடுகிறது.

ஆனல் $\dfrac{ax}{ax + b} < 1$.

எனவே $K = \dfrac{ax}{2(ax + b)} < 1$ ஆகின்றது.

அளிப்பின் நெகிழ்ச்சி (Elasticity of Supply)

ஒரு பொருளின் விலை அதிகரிக்கும்போது, அதைத் தயாரிக்கும் (அல்லது விற்கும்) நிறுவனம் அப்பொருளை அதிக அளவில் தயார் செய்து விற்க விரும்புகிறது என்று முன்பே கண்டோம்.

விற்கும் விலையின் விகிதாசார மாற்றத்திற்கேற்ற பொருள் (தயாரிக்கும்) அளிக்கும் அளவில் ஏற்படும் விகிதாசார மாற்றத்தின் வீதமே அளிப்பு நெகிழ்ச்சி e எனப்படும்.

$x = \varphi(p)$ என்பது அளிப்பு நியதி என்ருல்

அளிப்பின் நெகிழ்ச்சி $e = \dfrac{x}{p} \cdot \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{d(\log p)}{d(\log x)}$ ஆகும்.

இயல்பான நிபந்தனைகளின்படி, அளிப்பின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும், அளிப்பின் நெகிழ்ச்சி ஒரு நேர் மதிப்பாக இருக்கிறது.

எந்த ஒரு புள்ளியிலாவது, நெகிழ்ச்சியின் மதிப்பு பூஜ்யமாக இருக்குமானால், அந்தப் புள்ளியில் அளிப்பு முற்றிலும் நெகிழ்ச்சியற்றதாக இருக்கும். நெகிழ்ச்சி மிகமிக அதிகமாக இருக்கும்போது, அளிப்பு முற்றிலும் நெகிழ்ச்சியுள்ளதாக இருக்கும்.

மேலும் $e > 1$ என்றால், அளிப்பு அதையொட்டி ஒரு நெகிழ்ச்சியுடையதாக இருக்கும்.

$e < 1$ என்றால், அளிப்பு அதை ஒட்டியதான நெகிழ்ச்சியற்ற அளிப்பாகும்.

மாதிரி

அளிப்பு நியதி $9x = p^2 - 4$ என்றால் அளிப்பின் நெகிழ்ச்சியைக் கணிக்கவும்.

$$9x = p^2 - 4.$$

$$x = \frac{p^2 - 4}{9}$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2p}{9}.$$

எனவே அளிப்பின் நெகிழ்ச்சி $e = \frac{x}{p} \cdot \frac{dp}{dx}$

$$= \frac{p^2 - 4}{9p} \cdot \frac{9}{2p}$$

$$= \frac{p^2 - 4}{2p^2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{2p^2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{p^2}.$$

$p = 2$ எனும்போது $e = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = 0$ ஆகிறது.

$$p = 4;\ e = \frac{1}{2} - \frac{2}{16} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{4-1}{8} = \frac{3}{8}.$$

இங்கு e நெகிழ்ச்சி 1 இலக்கத்தை அடையாது.

$e < 1$ எல்லா p புள்ளிகளிலும் என்று தெரிகிறது.

இதையே வேறுவிதமாகவும் காணலாம்.

$9x = p^2 - 4$ என்பதற்குப் பதில் அளிப்பு நியதியை $p^2 = px + 4$ என மாற்றி எழுதினால்

$$= 2\,p.\,\frac{dp}{dx} = 9.$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{9}{2p}.$$

எனவே அளிப்பு நெகிழ்ச்சி

$$e = \frac{x}{p}\,.\,\frac{dp}{dx} = \frac{x}{p}\,.\,\frac{9}{2p} = \frac{9x}{2p^2}$$

$$= \frac{9x}{2\,(9x+4)}$$

$$= \frac{1}{2}.\,\left(\frac{9x+4-4}{9x+4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{9x+4}\right)$$ ஆகிறது.

x கூடக்கூட $\frac{4}{9x+4}$ குறைகிறது. ஆனால் $\frac{4}{9x+4} > 0$ ஆகும்.

எனவே $e = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{4}{9x+4}\right] < \frac{1}{2}$.

$x \rightarrow \infty$ என்றால் $\frac{4}{9x+4} \rightarrow 0$; $1 - \frac{4}{9x+4} \rightarrow 1$.

எனவே $e \rightarrow \frac{1}{2}$; அதிக x மதிப்புகளில்

$x = 0$ என்ற அளவில் $e = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{4}{4}\right] = 0$.

அதாவது $x = 0$ எனும்போது $e = 0$ ஆகிறது என்றால், அந்தப் புள்ளியில் அளிப்பு முற்றிலும் நெகிழ்ச்சியற்றதாக (perfectly nelastic) உள்ளது.

மேலும் $e < 1$ என்பதால், முன்னே கூறியதுபோல அளிப்பு ஒரு சார்புடைய நெகிழ்ச்சியற்றதாகும் (relatively inelastic).

மாதிரி

அளிப்பு நியதி $6p - 2x = 9$ என்றால் அளிப்பின் நெகிழ்ச்சியைக் கணக்கிட்டு ஆராய்க.

$$6p - 2x = 9.$$

$$2x = 6p - 9; \quad x = \frac{6p - 9}{2} = 3p - \frac{9}{2}.$$

$$= \frac{dx}{dp} = 3.$$

எனவே அளிப்பின் நெகிழ்ச்சி

$$e = \frac{x}{p} \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$= \frac{6p - 9}{2p} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{6p - 9}{6p} = 1 - \frac{9}{6p} = 1 - \frac{3}{2p}.$$

$p = 1$ என்றால் $e = 1 - \frac{9}{6} = -\frac{1}{2}.$

$p = 2$ என்றால் $e = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$

$p = \frac{3}{2}$ என்றால் $e = 1 - \frac{3}{2 \cdot \frac{3}{2}} = 0.$

$p = 5$ என்றால் $e = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} = 0{\cdot}7$

$p = 50 \qquad e = 1 - \frac{3}{100} = \frac{97}{100} = 0{\cdot}97$

$p = 500 \qquad e = 1 - \frac{3}{1000} = \frac{997}{1000}\ 0{\cdot}997$

$\therefore$ p கூடக்கூட e நெகிழ்ச்சி 1 இலக்கத்தை அணுகுகிறது.

எனவே $p = \frac{3}{2}$ என்ற விலையில், அதாவது $x = 0$ என்ற மதிப்பில் அளிப்பின் நெகிழ்ச்சி பூஜ்யமாகிறது. இந்த $x = 0$ என்ற புள்ளியில் அளிப்பு நெகிழ்ச்சியற்றதாக உள்ளது. $p=500$ என்றால், $x = 3p - \frac{9}{2} = 1500 - \frac{9}{2} = 1495 \cdot 5$ விலை கூடினால், அளிப்பின் அளவும் கூடுகிறது. அளிப்பின் நெகிழ்ச்சியும் ஒன்று இலக்கத்தை அணுகுவதைக் காண்கிறோம்.

மாதிரி

அளிப்பு நியதி $p = 3 + \frac{x^2}{4}$ என்பதற்கான அளிப்பு நெகிழ்ச்சி யாது?

$$p = 3 + \frac{x^2}{4}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}.$$

அளிப்பு நெகிழ்ச்சி $= e = \frac{x}{p} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{x}{3 + \frac{x^2}{4}} \cdot \frac{x}{2}$

$$= \frac{4x^2}{2(12 + x^2)} = \frac{2x^2}{x^2 + 12}$$

$x = 0$ என்றால் $e = 0$

$x = 1$ என்றால் $e = \frac{2}{13} = 0 \cdot 15$

$x = 2$ என்றால் $e = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 0 \cdot 50$

$x = 3$ என்றால் $e = \frac{18}{21} = \frac{6}{7} = 0 \cdot 86$

$x = 4$ என்றால் $e = \frac{32}{28} = \frac{8}{7} = 1 \cdot 14$

$x = 10$ என்றால் $e = \frac{200}{112} = 1 \cdot 78$

இவ்வாறு $x = 0$ எண்ணும்போது $e = 0$ என்று ஆரம்பித்து x கூடக் கூட e-ம் கூடி $e > 1$ ஆகிறது.

எனவே அளிப்பு ஒரு நெகிழ்ச்சியுடைய அளிப்பு எனக் கூறலாம்.

இதை $x = \phi(p)$ என்று குறித்தும் e கண்டுபிடிக்கலாம். அப்போதும் இதே விளைவுதான் ஏற்படுகிறது என்பதை வாசகர்களுக்கு நிரூபணம் செய்ய விடப்படுகிறது.

பயிற்சிகள்

1. ஒரு நிறுவனத்தின் மொத்தச் செலவுச் சமன்பாடு

$$\Pi = ax. \frac{x+b}{x+c} = d.$$

a, b, c, d என்பன நேர்நிலை எண்கள்; $d < a(c-b)$ என்றால், சராசரிச் செலவு, விளிம்புச் செலவு வளைகோடுகள் இயல்பான வடிவுடையவை என்று நிரூபிக்கவும். மேலும் சராசரிச் செலவு ஒரு மீச்சிறு மதிப்பையுடைய வளைகோடு என்றும், விளிம்புச் செலவு வளைகோடு ஒரு தொடர்ச்சியாக ஏறும் வளைகோடு என்றும் காட்டுக.

2. $\Pi = ax^2 \dfrac{x+b}{x+c} + d$ என்பது ஒரு மொத்தச் செலவுச் சார்பலன் என்று கொள்க. a, b, c, d நேர்நிலை எண்கள்; $b > c$; என்றால் சராசரி, விளிம்புச் செலவுகள் x-ன் சார்பலன்கள் என்று நிரூபித்துக் காட்டுக.

மேலும் $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\Pi}{x}\right)$-ன் மதிப்பு x உடன் அதிகரிக்கிறது என்றும், சிறிய x மதிப்புகளுக்கு எதிர்மறையாகவும் (பெரிய) அதிக x மதிப்புகளுக்கு நேர்மறையாகவும் உள்ளது என்றும் நிரூபி.

x கூடும்போது $\dfrac{d\Pi}{dx}$ என்பது 0-லிருந்து மிகப்பெரிய மதிப்புகளுக்கு அதிகரிக்கிறது என்றும் காட்டுக.

3. ஒரு பொருளின் அளிப்பு நியதி $x = a\sqrt{(p-b)}$ எனக் கொள்வோம். இங்கு, p, a, b நேர்நிலை எண்கள்; $p > b$ அளிப்பை p-ன் சார்பலனாகக் கொண்டு அளிப்பின் நெகிழ்ச்சி e-ஐக் கணக்கிடவும். பொருளின் விலையும், அளிப்பு அளவும் கூடும்போது e குறைவதை நிரூபிக்கவும். $p = 2b$ என்றால் $e = 1$ என்று காட்டுக.

கீழ்க்கண்ட அளிப்பு நியதிகளுக்கு அளிப்பு நெகிழ்ச்சி e கணக்கிடுக.

4. அளிப்பு நியதி : $x = 4p - 8$

5. அளிப்பு நியதி : $p = 0{\cdot}6 + 0.5x$

6. அளிப்பு நியதி : $p = 2 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{20}$

7. அளிப்பு நியதி : $p = \frac{x}{20} + 1.$

தேவையின் பகுதி நெகிழ்ச்சி (Partial Elasticity of Demand)

பல மாறிகளைச் சார்ந்த தேவைச் சார்பினைக் கருதுவோம். குறிப்பாக, இரு மாறிகளைச் சார்ந்த தேவைச் சார்பானது, மற்றப் பொருட்களின் விலைகள் நிலையாக இருக்கையில், X_1, X_2 என்ற இரு பண்டங்களின் தேவைகளை

$$x_1 = \varphi_1 (p_1, p_2) ; \quad x_2 = \varphi_2 (p_1, p_2)$$

என்ற விதிகளின்படி நிர்ணயிக்கும் தன்மைத்தாகும். p_1, p_2 என்பவை பொருட்களின் மாறுபடும் விலை அளவுகளாகும். தேவைப் பரப்பின், p_2 அச்சுக்கு நிலைக்குத்தான தளத்தின்படி (p_2 நிலையானது) அமையும் பகுதியானது, p_1 மாறுபடுகையில் x_1 ஆனது மாறும் இயல்பினைக் குறிப்பதாகும். ஒவ்வொரு p_2-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கும், இது ஒரு தேவை வளைவினை அளிக்கும். இவ்வாறு பெறப்படும் தேவை வளைவுகளனைத்தும், இயல்நிலையில், கீழ்நோக்கிச் சரிந்திருக்கும்.

இதே போல, p_1 அச்சுக்கு நிலைக்குத்தான தளத்தின்படி அமையும் பகுதியானது, p_1-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு, p_2 மாறுபடுகையில் x_1-ல் ஏற்படும் மாறுபாடுகளைக் குறிக்கும் வளைவாக அமையும். ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில், இவ்வளைவு மேல் நோக்கி (upward) சரிந்திருப்பின், X_2-ன் விலை அதிகரிக்கையில், X_1-ன் தேவை அதிகரிக்கும் என்பது தெளிவாகும். அப்போது, பொருட்கள் 'போட்டியிடும்' (competitive) தன்மையனவாக அமைந்திருக்கும். மாறாக, இப்பகுதியானது கீழ்நோக்கி சரிந்திருப்பின், இதற்கு முற்றிலும் எதிரான நிலையில் பொருட்கள் 'நிறைவு செய்யும்' (complementary) தன்மையனவாக அமையும்.

ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய (related) பொருட்களின் சில வகை தேவைச் சார்புகள் வருமாறு :

(i) $x_1 = a_1 - a_{11} p_1 + a_{12} \cdot p_2$;

$$x_2 = a_2 + a_{21} \cdot p_1 - a_{22} \cdot p_2$$

(ii) $x_1 = \dfrac{a_1}{p_1 + a_{11}} + a_{12} \cdot p_2$;

$$x_2 = \frac{a_2}{p_2 + a_{22}} + a_{21} \cdot p_1$$

(iii) $x_1 = a_1 \cdot p_1^{-a_{11}} \cdot p_2^{a_{12}}$;

$$x_2 = a_2 \cdot p_1^{a_{21}} \cdot p_2^{-a_{22}}$$

(iv) $x_1 = p_1^{-a_{11}} \cdot e^{a_{12} p_2 + a_1}$;

$$x_2 = p_2^{-a_{22}} \cdot e^{a_{21} p_1 + a_2} .$$

a_{11}, a_{22}, a_1, a_2 ஆகியவை > 0 ஆகும். a_{12}, a_{21} ஆகியவை எந்த அடையாளத்தையும் (+ அல்லது —) பெற்றிருக்கும். இரண்டும் நேர்க் கணியமாய் இருப்பின், பொருட்கள் போட்டியிடுவன; இரண்டும் எதிர்க் கணியமாய் இருப்பின், அவை நிறைவு செய்வன ஆகும்.

மேலே கருதப்பட்ட தேவைச் சார்பான $x_1 = \varphi_1 (p_1, p_2)$ என்பதன் பகுதி வகையீட்டுக் கெழுக்கள் (partial derivatives), மற்ற விலைகள் நிலையாக இருக்கையில், ஒரு விலை மாறுகையில், தேவையில் ஏற்படும் மாறுபாடுகளைத் தருகின்றன. $\dfrac{\partial x_1}{\partial p_1}$ (< 0) என்ற பகுதி வகையீட்டுக் கெழுவானது X_1 என்ற பொருளின் தேவை அளவானது அதனுடைய விலை அதிகரிப்புக்கு ஏற்ப மாறும் வீதத்தைக் (குறையும் வீதத்தை) காட்டுகிறது. இதற்கேற்ற, பகுதி நெகிழ்ச்சிக் கெழு (p_1 விலையைச் சார்ந்தது)

$$\eta_{11} = - \frac{\partial \log x_1}{\partial \log p_1} = - \frac{p_1}{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1}$$

என்பதாகும். இது, பொருளின் தேவை, விலை ஆகியவற்றின் அலகுகளோடு தொடர்பற்றதாகும். விலை விகித மாறுதலுக்கேற்ப அமையும் தேவை விகித மாறுபாட்டு வீதத்தை இது

குறிக்கும். இது, p_1 மாறியினை மட்டுமின்றி, மற்ற விலைகளையும் சார்ந்த சார்பாக அமைகிறது.

பொதுவாக, $\frac{\partial x_r}{\partial p_s}$ என்ற பகுதி வகையீட்டுக் கெழுவைக் கருதினால், அது X_s என்ற மற்றொரு பொருளின் தேவை அளவை குறிக்கும். இதேபோல, $\frac{\partial x_s}{\partial p_r}$ என்பது, X_r-ன் விலை அதிகரிக்கையில், X_s-ன் தேவையின் மாறுபாட்டு வீதத்தை நிர்ணயிக்கிறது. இவ்விரு பகுதிவகையீட்டுக் கெழுக்களும் நேர்க் கணியமானால், p_s விலைக்கேற்ப x_r தேவை அதிகரிக்க, அதேபோல், p_r விலைக் கேற்ப x_s தேவையும் அதிகரிப்பதைக் காணலாம். அப்போது, X_r, X_s என்ற அப்பொருட்கள் 'போட்டியிடும்' நிலையில் அமைகின்றன. இதற்கு மாறாக, இரு பகுதி வகையீட்டு கெழுக்களும் எதிர்க் கணியமாக இருப்பின், மற்ற பொருளின் விலைக்கு எதிரான நிலையில் ஒரு பொருளின் தேவையானது மாறுபடும் எனவும், பொருட்கள் 'நிறைவு செய்' நிலையில் அமைவதென்றும் அறியற்பாலது.

∴ குறுக்கீட்டு நெகிழ்ச்சிகளாவன :

$$\eta_{rs} = -\frac{\partial \log x_r}{\partial \log p_s} = -\frac{p_s}{x_r} \cdot \frac{\partial x_r}{\partial p_s} ;$$

$$\eta_{sr} = -\frac{\partial \log x_s}{\partial \log p_r} = -\frac{p_r}{x_s} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial p_r} .$$

இவை, மற்றொரு பொருளின் விலையுடன் தொடர்புடைய, ஒரு பொருளின் தேவையின் பகுதி நெகிழ்ச்சிக் கெழுக்களாகும்.

நேரடி நெகிழ்ச்சி கெழுக்கள்

$$\eta_{rr} = -\frac{p_r}{x_r} \cdot \frac{\partial x_r}{\partial p_r} ; \quad \eta_{ss} = -\frac{p_s}{x_s} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial p_s}$$ ஆகும்.

உதாரணம்

நேர்நோட்டின் வடிவில் அமையும் தேவைச் சார்புகள் (இரு பொருட்களுக்கு) :

$$x_1 = a_1 - a_{11} p_1 + a_{12} p_2 ; \quad x_2 = a_2 + a_{21} p_1 - a_{22} p_2 .$$

∴ தேவையின், விலைத்தொடர்புடை, நெகிழ்ச்சிகள் :

$$\eta_{11} = a_{11} \cdot \frac{p_1}{x_1}; \ \eta_{22} = a_{22} \cdot \frac{p_2}{x_2};$$

$$\eta_{12} = -a_{12} \cdot \frac{p_2}{x_1}; \ \eta_{21} = -a_{21} \cdot \frac{p_1}{x_2}.$$

பொருட்களுக்கு ஒருதரப்பட்ட விலைகளை இவை அனைத்தும் சார்ந்திருக்கும்.

உதாரணம்

தேவைச் சார்புகள்

$$x_1 = a_1 \cdot p_1^{-a_{11}} \cdot p_2^{a_{12}}; \ x_2 = a_2 \cdot p_1^{a_{21}} \cdot p_2^{-a_{22}}$$

என்றபடி இருப்பின், மடக்கை அளவுகோலைக் கருதுகையில், சார்புகள் நேர்கோட்டு வடிவில் அமைந்திருக்கும். தேவையின், விலைச் சார்புடை, நெகிழ்ச்சிகள் மாறிலிகளாக அமைந்திருக்கக் காணலாம் :

$$\eta_{11} = a_{11}; \ \eta_{22} = a_{22};$$

$$\eta_{12} = -a_{12}; \ \eta_{21} = -a_{21}.$$

14. சர்வாதீனம்

(Monopoly)

நிறைவுப் போட்டி நிலைக்கு நேர் எதிரான இயல்புடையது 'சர்வாதீன' நிலை ஆகும். பொதுவாக, சர்வாதீனம் என்பது, மிக நெருங்கிய பதிலீட்டுப் பொருட்கள் அதிகமாக இராத ஒரு பொருளின் அளிப்பும் விற்பனையும் ஒரே ஒரு தனித்த உற்பத்தியாளரால் கட்டுப்படுத்தப்படும் நிலையினைக் குறிப்பதாகும். இவற்றை முழுமையான அளவில் கட்டுப்படுத்துவது இயலாதெனினும், அங்காடியில் ஆதிக்கம் செலுத்தத் தக்க அளவிற்கு அப்பொருளின் விலையைத் தீர்மானிக்கும் பொருட்டு, அதன் கணிசமான ஒரு பகுதியை அவரால் கட்டுப்படுத்துவது எளிதாகிறது. எனவே, சர்வாதீனமானது, ஒரு தனித்த விற்பனையாளரையோ, அல்லது ஒரு நிறுவனத்தினையோ, அல்லது சில நிறுவனங்களின் தொகுப்பையோ (Collection of firms), குறிப்பதெனக் கொள்ளலாம். நிறுவனத்திற்கும் (firm), தொழிலுக்கும் (industry), எந்தவித வேறுபாடும் இந்நிலையில் காணப்படுவதில்லை. பொருளின் விற்பனையில் எந்தவிதப் போட்டியும் (rivalry) நிலவுவதில்லை. பொருளின் விற்பனையைக் கட்டுப்படுத்துதலே, விற்பனைச் சர்வாதீனத்தின் முக்கிய நோக்கமாக அல்லது குறிக்கோளாக அமைகிறது. ஆனாலும், கொடுக்கப்பட்ட எந்தநிலையிலும், ஒரு சர்வாதீனனுனவன் பொருளின் விலையையும், அதன் விற்பனை அளவையும் ஒருங்கே ஆதிக்கம் செலுத்த இயலாது என்பது குறிப்பிடத் தக்கது.

பொதுவுடைமை ஆக்கப்படும் (nationalized) தொழில்கள் அனைத்துமே சர்வாதீனத்தில் அடங்கும். எந்த ஒரு வரையறையுமே இல்லாத முற்றுரிமையுள்ள சர்வாதீனநிலை அமைவது கடினமானதாகும். சர்வாதீன அளிப்பு நிலையில், பொருளின் விற்பனையை அதிகப்படுத்துதற்காக, விளம்பரம் போன்ற பலவகையான முயற்சிகள் கையாளப்படுகின்றன. இவ்வாறு, பொருளின்

அளிப்பை மட்டும் அவன் கட்டுப்படுத்தலாமே தவிர, தேவை அளவினைக் கட்டுப்படுத்துவது இயலாத காரியம். சர்வாதீனத்தில் அளிக்கப்படும் பொருளின் தேவைப்பட்டியலானது, நுகர்வோர் கருதும் பதிலீட்டுப் பொருட்களின் மூலமாகவும், மாற்றுப் (alternative) பொருட்களின் மூலமாகவும் மிகவும் பாதிக்கப்படுகிறது. சர்வாதீன இலாப அளவு உச்ச மிகுதிப்படுத்தப்படும் பொருட்டு, பொருளுக்கு அதிக விலை நிர்ணயிக்கப்படுகையில், அங்காடியில் அதனை மிகக் குறைந்த அளவே விற்க இயலுகின்றது என்பதும் குறிப்பிடத்தக்கது. இவ்வாறு, பொருளின் அளிப்பினைக் கட்டுப் படுத்துவதன் மூலமாக, அவனால் அப் பொருளிற்கு அதிக அளவு விலையினைத் தீர்மானிக்க முடிகிறது. எனவே, விற்பனைச் சர்வா தீனம் என்ற பொருளில் இந்நிலை அறியப்படுகின்றது.

இனி, சர்ாவதீனத்தில் அமைந்த பொருளாதாரக் கோட்பாட் டினைப் பின்வருமாறு விரிவாக ஆராய்கிறோம். இங்கு, ஒரு பொருளின் ஒரே உற்பத்தியாளனும், தனது நிகர இலாபத்தை உச்சநிலைப்படுத்த விழையும் சர்வாதீனனுமான ஒருவனைப் பற்றிக் கருதுகிறோம். இச் சர்வாதீனக் கருத்து, உற்பத்தி இயலில் மிகவும் முக்கியமான பங்கு வகிக்கின்றது. மேற் குறிப்பிடப்பட்ட எடு கோள்களைக் கொள்வதன் மூலமாக, சில தெளிவான உண்மைகளை அல்லது முடிவுகளை நிர்ணயிக்க முயல்கிறோம்.

ஒரு சர்வாதீனனானவன், தன்னிச்சைப்படித் தனது விற்பனைப் பொருளிற்கு எந்த ஒரு விலையையும் நிர்ணயிக்கவோ அல்லது தனக்கு விருப்பமான எந்த அளவையும் விற்பனை செய்யவோ இயலும். ஆனால், தான் விருப்பும் எந்த விலை மதிப்பிலும், தன்னிச்சைப்படி எந்த ஒரு அளவினையும் அவனால் விற்பதற்கு இயலாது என்பது கவனிக்கத் தக்கது. அதாவது, ஒரு குறிப்பிட்ட விலையில் அவனால் விற்கப்படும் அளவானது, அவனுடைய பொருளின் தேவை நிலையினைப் பொறுத்து அமைகிறது. எனவே, அவனுக்கு மிகவும் இலாபகரமாக இருக்கும் விலை அல்லது விற்பனை அளவு எது என்று வினவுவது ஒரே இயல்புடையதாகும். தன்னிச்சைப்படி நிர்ணயிக்கும் விலைக்கு ஏற்ற விற்பனை அளவும், தனது விருப்பத்திற்கேற்ப விற்க முயலும் அளவை உற்பத்தி செய்கையில் நிர்ணயிக்கப்படும் விலையும், அப்பொருளினது தேவை விதியினுக்கேற்ப அமையும்,

கணிதக் கோட்பாடுகளைக் பயன்படுத்தி, சர்வாதீனப் பிரச்சினையைப் பின்வருமாறு தீர்க்கலாம்:

சர்வாதீனத்தின் அடிப்படைக் குறிக்கோளானது, 'நிகர இலாப அளவினை உச்சநிலைப்படுத்துதல்' என்பதாகும். அதற் கேற்ப, வகையீட்டுக் கணித முறைகளைப் பின்பற்றி, பொருளின் விலை மற்றும் அதன் மொத்த விற்பனை, அளவு ஆகியவற்றைப் பின்வருமாறு நிர்ணயிக்கலாம் :

ஒரு சர்வாதீன நிறுவனமானது, X என்ற பொருளைக் கொடுக் கப்பட்ட உற்பத்திச் செலவுக்கு உட்பட்டு, உற்பத்தி செய்வதாகக் கொள்வோம். இயல்பான நிலையில், மொத்த உற்பத்திச் செலவானது $\pi = F(x)$ என்ற சார்பின்படி கொடுக்கப்படுகிறது. அந் நிறுவனத்தின் உற்பத்திப் பொருளின் அங்காடித் தேவை $x = \varphi(p)$ அல்லது $p = \psi(x)$ என்ற தேவைச் சார்பின்மூலம் நிர்ணயிக்கப்படுவதாகவும் கருதலாம். x என்பது. p என்ற விலையில் அமையும் பொருளின் தேவை அளவைக் குறிப்பதாகும். இத் தேவைச் சார்பின் மூலம் நிர்ணயிக்கப்படும் எல்லை வரை யறைக்கு உட்பட்டு. இந் நிறுவனமானது தனது நிகர இலாப அளவினை உச்சநிலைபடுத்துவதாகக் கருதப்படுகிறது. இதுவே தீர்க்கப்படவேண்டிய பிரச்சினை. இதன் தீர்வானது, இரு வழி களில் காணப்படுகிறது. அவை :

1. அந் நிறுவனமானது, தனது உற்பத்தி அளவினை(output) நிர்ணயித்துக் கொண்டு, அதன் விற்பனை விலையை தேவை விதியின் மூலம் தீர்மானிக்கப்பட விட்டு விடலாம்.

(அல்லது)

2. அப்பொருளின் விலையைத் தன் இச்சைப்படி அந் நிறுவனம் நிர்ணயித்துக் கொண்டு, அதற்குத் தக்க விற்பனை அளவைத் தேவை விதிகள் நிர்ணயிக்குமாறு விட்டு விடலாம்.

இந்த இரண்டு வழிமுறைகளுமே இறுதியில் ஒரே வகையான தீர்வை அளிக்கக் காணலாம். இத்தகைய ஆய்வில், மற்றக் காரணங்கள் அனைத்தும் மாருதன (stable) வாகக் கருதப்படும். இது ஒரு முக்கிய நிபந்தனையாகும்.

1. முதல் நிலையை விரிவாகக் கருதுவோம் :

இந்நிலையில், நிறுவனமானது பொருளின் உற்பத்தி அளவினை (x) நிர்ணயித்துக் கொள்கிறது. இவ்வாறு நிர்ணயிக்கப்படும் x என்ற அளவுக்கு ஏற்ற விலையானது $p = \psi(x)$ என்ற தேவைச் சார்பின் மூலம் அமையும். இங்கு தேவைச் சார்பானது x-ஐச் சார்ந்ததாகக் கருதப்படும். மொத்த விற்பனை அளவு x என்பதி

லிருந்து அந் நிறுவனத்துக்குக் கிடைக்கும் மொத்த வருவாய் (செலவு உள்ளீடு) (gross revenue) ஆனது $R = x \cdot \psi(x)$ என்ற சார்பாக அமைகிறது. மேலும், அப்பொருளை உற்பத்தி செய்வதற்கு ஆகும் மொத்தச் செலவு $\pi = F(x)$ என்ற சார்பின்படி தரப்படும். எனவே, மொத்த வருவாயிலிருந்து மொத்தச் செலவினைக் கழிப்பதன் மூலம், நிகர வருமானம் அல்லது இலாபம் (net revenue) கிடைக்கிறது. இதுவும், x-ஐச் சார்ந்த ஒரு சார்பாகவே காணப்படும்.

நிகர இலாபம்

$$y = R - \pi = p(x)$$

தீர்மானிக்கப்படும் x அளவானது உச்ச இலாப அளவினைத் தர வேண்டுமெனில், பின் வரும் நிபந்தனைகள் அமையவேண்டும் :

முக்கிய நிபந்தனை :

$$\frac{dy}{dx} = 0 ;$$

அல்லது $$\frac{d}{dx}(R - \pi) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dR}{dx} = \frac{d\pi}{dx} .$$

அதாவது, சமநிலை உற்பத்தியான x-ல், இறுதிநிலை வருவாய் அளவும், இறுதிநிலைச் செலவும் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

போதுமான நிபந்தனை $$\frac{d^2 y}{dx^2} < 0.$$

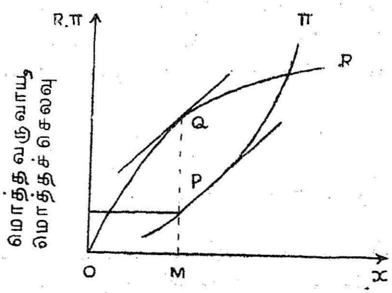
அல்லது $$\frac{d^2}{dx^2}\{R - \pi\} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(R - \pi)\right]$$

$$= \frac{d^2 R}{dx^2} - \frac{d^2 \pi}{dx^2} < 0$$

$$\therefore \quad \frac{d^2 R}{dx^2} < \frac{d^2 \pi}{dx^2} .$$

எனவே, சமநிலையில், இறுதிநிலை வருவாய் அளவானது, இறுதிநிலை உற்பத்திச் செலவைவிடக் குறைந்த வீதத்தில் அதிகரித்தல்வேண்டும். இந் நிபந்தனையின் மூலமாக, உச்சநிலை

இலாபம் அமையும் கட்டத்தைத் தீர்மானிக்க இயலுகிறது. எனவே சர்வாதீனப் பிரச்சினையின் தீர்வு இவ்வாருக எளிதாய் அமைகிறது. இதனைப் பின்வரும் விளக்கப் படத்தில் காட்டலாம் :



R : மொத்த வருவாய் வளைவு; π : மொத்தச் செலவு வளைவு; OM : சமநிலை உற்பத்தி அளவு.

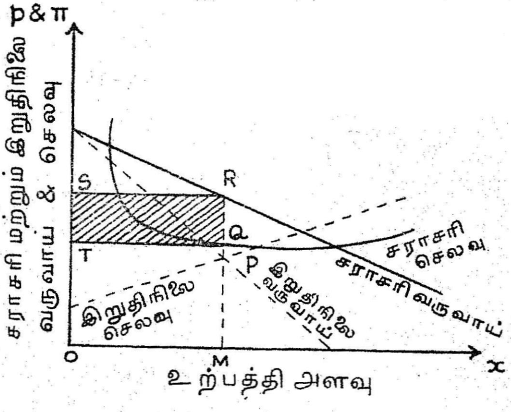
படம் 44.

இந்த விளக்கப் படத்தில், மொத்த வருவாயும், மொத்தச் செலவும் கருதப்படுகின்றன. இந்த இரு வளைவுகளிலும், தொடு கோடுகள் இணையாக அமையும் விதத்தில் ஒரே செங்குத்துக் கோட்டில் இரு புள்ளிகள் P, Q என அமைவதாகக் கொள்வோம். அதாவது, $\frac{dR}{dx} = \frac{d\pi}{dx}$ என்ற நிபந்தனையினை இது குறிக்கும். இந்த இரு புள்ளிகட்கும் பொதுவாக அமைந்த பொதுவான உற்பத்தி அளவு சர்வாதீன சமநிலை உற்பத்தியாக அமையும். இதற்குப் போதுமான ஒரு நிபந்தனையானது, இப்புள்ளியில், மொத்த வருவாய் வளைவானது மொத்த உற்பத்திச் செலவு வளைவினைவிட, கீழிருந்து மேலாக, மிகவும் குறைந்த குவிவுத் தன்மையினை உடையதாக இருத்தல் வேண்டும். அதாவது, $\frac{d^2 R}{dx^2} < \frac{d^2 \pi}{dx^2}$ என்ற போதுமான நிபந்தனையினை இது குறிக்கும்.

மேற்கண்ட விளக்கப் படத்தில், நிகர இலாப அளவானது, கொடுக்கப்பட்ட உற்பத்தி நிலையில், (அதாவது, x). மொத்தச் செலவு வளைவிலிருந்து மொத்த வருவாய் வளைவினுக்கு உள்ள தூரத்தின் மதிப்பாகக் கணக்கிடப்படும். PQ என்ற நிலையில், இந்த இலாப அளவானது உச்ச மதிப்பினை அடைகிறது. P என்ற புள்ளியில் மொத்தச் செலவு வளைவிற்கு அமையும் தொடுகோடும், Q எனும் புள்ளியில் மொத்த வருவாய் வளைவிற்கு அமையும்

தொடுகோடும் இணையாக அமைந்திருக்கின்றன. இந்நிலையில், சர்வாதீன உற்பத்தி அளவு x ஆனது (OM) தனி இயல்பினதாகத் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. சர்வாதீன விலையானது, இந்த OM உற்பத்தி அளவில், OQ என்ற தொடுகோட்டின் சாய்வு அளவாக (gradient) மதிப்பிடப்படுகிறது.

மேற் கருதப்பட்ட சர்வாதீன நிலையினை, வேறொரு விதத்தில், சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் செலவு வளைவுகளைக் கருதுவதன் மூலம், (அதே அச்சுக்களில், அதே அளவுகோலின் படி) பின்வரும் விளக்கப் படத்தின் மூலமாகவும் எடுத்துக் காட்டலாம். சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை வளைவுகளை, மேற்கண்ட மொத்த அளவுகளைக் குறிக்கும் வளைவுகளிலிருந்து பெறலாம். இவற்றில் மூன்று வளைவுகளை நேர்கோட்டு வடிவில் கொள்கிறோம். இந்நிலையில், சர்வாதீன இலாபமானது உச்சநிலைப் படுத்தப்படுவதற்கான முக்கிய மற்றும் போதுமான நிபந்தனைகளையும் இவ் விளக்க படத்தில் காட்டுகின்றோம். சராசரி வருவாய், இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் இறுதி நிலைச் செலவு ஆகியவற்றினைக் குறிக்கும் வளைவுகள் நேர்கோட்டு வடிவினதாகக் கருதப்படுகின்றன.



படம் 45.

மேற்கண்ட வரை படத்தில், தனித்தன்மையுள்ள சர்வாதீன உற்பத்தியானது OM என்று P எனும் புள்ளியின்மூலம் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. இப் புள்ளியில், இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலை செலவு வளைவுகள் ஒன்றை ஒன்று வெட்டிச் செல்வதைக் காணலாம். சர்வாதீன விலையானது MR என்ற அளவினதாக அமையும். சராசரிச் செலவானது MQ என்பதாகும்.

எனவே, உச்சப்படுத்தப்பட்ட நிகர இலாபமானது $(QR \times OM)$ அளவாக அமைகிறது. இதனை, தீட்டப்பட்ட செவ்வகப் பரப்பின் மூலம் காட்டுகிறோம் $(QRST)$. உச்ச இலாபத்துக்கான போதிய நிபந்தனை இங்கு அமையக் காணலாம். அதாவது, இறுதிநிலை வருவாய் குறைந்தும், இறுதிநிலைச் செலவு அதிகரித்தும் காணப் படுகின்றன.

2. இரண்டாவது நிலை

இரண்டாவது முறையின்படி, கொடுக்கப்பட்ட நிறுவன மானது பொருளின் விலையை நிர்ணயித்துக் கொள்வதாகவும், விற்பனை அளவு (output) தேவை விதிக்கு ஏற்பத் தீர்மானிக்கப் படுவதாகவும் கருதப்படுகிறது.

இந்நிலையில், தேவைச் சார்பானது $x = \varphi(p)$ என்ற வடிவில் அமைகிறது.

∴ மொத்த வருவாய்ச் சார்பானது

$$R = x.p = p.\varphi(p) \text{ ஆகும்.}$$

மொத்தச் செலவுச் சார்பு

$$\pi = F(x) = F\{\varphi(p)\} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, நிகர இலாபமானது

$$y = R - \pi \quad (p\text{-யினைச் சார்ந்தது}).$$

∴ y-ன் மதிப்பு உச்சநிலை அடைய, முக்கிய நிபந்தனை

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ அதாவது } \frac{d}{dp}(R - \pi) = 0$$

அல்லது,

$$\frac{d}{dp}[p \cdot \varphi(p)] - \frac{d\pi}{dp} = 0.$$

அதாவது,

$$\varphi(p) + p.\varphi'(p) - \frac{d\pi}{dp} \cdot \varphi'(p) = 0$$

$$\left(\text{ஏனெனில், } \frac{d\pi}{dp} = \frac{d\pi}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} \text{ ஆகும்}\right).$$

எனவே, சமநிலை விலையை நிர்ணயிக்கும் சமன்பாடு

$$\varphi(p) + \left(p - \frac{d\pi}{dx}\right)\varphi'(p) = 0 \qquad \ldots \qquad (1)$$

என அமையும்.

மேலும், உச்சநிலை இலாபத்தினை அடைய, போதுமான நிபந்தனை,

$$\frac{d^2 P}{dp^2} < 0 \text{ அல்லது } \frac{d^2}{dp^2}(R - \pi) < 0$$

அதாவது,

$$\frac{d}{dp}\left\{\frac{d}{dp}(R - \pi)\right\} < 0$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dp}\left\{\varphi(p) + \left(p - \frac{d\pi}{dx}\right)\varphi'(p)\right\} < 0$$

$$\therefore \quad \left\{2 - \varphi'(p)\cdot\frac{d^2\pi}{dx^2}\right\}\varphi'(p) + \left(p - \frac{d\pi}{dx}\right)\varphi''(p) < 0 \qquad \ldots \qquad (2)$$

என்பதாகும்.

ஆகவே, சமன்பாடு (1)-லிருந்து பெறப்படும் p மதிப்பில், மேற்கண்ட சமனிலி (2)-ம் பொருந்தி அமையும் நிலையில், அம் மதிப்பில் சர்வாதீன நிலையின் நிகர இலாப அளவு உச்சமாகத் தக்க சர்வாதீன விலையும், அதற்கேற்ற உற்பத்தி $x = \varphi(p)$ என்பதும் தீர்மானிக்கப்படுகின்றன.

இந்த முறையினைப் பயன்படுத்துவதன்மூலம் பெறப்படும் தீர்வு, முதல் முறையிலிருந்து எந்தவிதத்திலும் வேறுபட்டதல்ல என்பது குறிப்பிடத் தக்கது.

மேலும், சமன்பாடு (1)-லிருந்து,

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{\varphi(p) + p.\varphi'(p)}{\varphi'(p)}$$

$$= \frac{dR}{dp} \Big/ \frac{dx}{dp} = \frac{dR}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} \Big/ \frac{dx}{dp}$$

$$= \frac{dR}{dx}$$

என்று அறிகிறோம்.

∴ இறுதிநிலை வருவாய் = இறுதிநிலைச் செலவு என்ற நிபந்தனையே இங்கும் அமைவதைக் காண்கிறோம்.

உதாரணம் 1:

சர்வாதீனத்தில் பொருளின் தேவை $p = 12-4x$, என்றும், மொத்தச் செலவு $8x - x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 3)$, என்றும் கொடுக்கப் பட்டால், உச்ச அளவு நிகர இலாபத்தைக் கணக்கிடவும். x, p ஆகியவற்றையும் காண்க.

x-ஐச் சார்ந்து அமையும் முதல் நிலையைக் கருதுக.

தேவைச் சார்பு $p = 12 - 4x.$

∴ மொத்த வருவாய் $R = x \cdot p$

$= 12x - 4x^2.$

∴ இறுதிநிலை வாருவாய் $\frac{dR}{dx} = 12 - 8x.$

மொத்தச் செலவு $\pi = 8x - x^2.$

எனவே, இறுதிநிலைச் செலவு $\frac{d\pi}{dx} = 8 - 2x.$

முக்கிய நிபந்தனை :

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d\pi}{dx}$$

அல்லது $12 - 8x = 8 - 2x$

$$\therefore \quad 6x = 4$$

எனவே, $x = \frac{4}{6}$ அல்லது $\frac{2}{3}$.

போதிய நிபந்தனை :

$$\frac{d^2R}{dx^2} < \frac{d^2\pi}{dx^2}$$

அதாவது $-8 < -2.$

ஆகவே, $x = \frac{2}{3}$ எனும் நிலையில், இலாப அளவு உச்சநிலை அடைகின்றது.

இதற்கேற்ற விலை $p = 12 - \left(4 \times \frac{2}{3}\right) = \frac{28}{3}$ ஆகும்.

உச்ச அளவு இலாபம் :

நிகர இலாபம் $y = R - \pi$

$$= (12x - 4x^2) - (8x - x^2)$$

$$= 4x - 3x^2.$$

$x = \frac{2}{3}$ எனப் பிரதியிட, $y = \left(4 \times \frac{2}{3}\right) - \left(3 \times \frac{4}{9}\right)$

$$= \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$

$\therefore$ உச்ச அளவு இலாபம் $\frac{4}{3}$ ஆகிறது.

உதாரணம் 2

தேவை மற்றும் செலவுச் சார்புகள் $x = 75 - 3p$; $\pi = 100 + 3x$ என்று அமைந்திருப்பின், உச்ச இலாப அளவை மதிப்பிடுக. பொருளின் விலை, உற்பத்தி ஆகியவற்றையும் காண்க.

p-யினைச் சார்ந்த நிலையினைக் கருதுக.

தேவைச் சார்பு $x = 75 - 3p.$

$\therefore$ மொத்த வருவாய் $R = 75p - 3p^2$

இறுதிநிலை வருவாய் $\frac{dR}{dp} = 75 - 6p.$

மேலும், உற்பத்திச் செலவு

$$\pi = 100 + 3x$$

$$= 100 + 3(75 - 3p)$$

$$= 325 - 9p.$$

$\therefore$ இறுதிநிலைச் செலவு $\frac{d\pi}{dp} = -9$

முக்கிய நிபந்தனை :

$$\frac{dR}{dp} = \frac{d\pi}{dp}$$

அதாவது $75 - 6p = -9$

அல்லது $6p = 66$

$\therefore \quad p = 11.$

போதிய நிபந்தனை :

$$\frac{d^2R}{dp^2} < \frac{d^2\pi}{dp^2}$$

அதாவது $-6 < 0$

$\therefore$ $p = 11$ என்ற நிலையில், இலாபமானது உச்ச நிலையை அடையும். இதற்கேற்ற உற்பத்தியானது,

$$x = 75 - 3p = 75 - (3 \times 11)$$
$$= 75 - 33 = 42$$

$\therefore \quad x = 42$ ஆகும்.

$\therefore$ உச்ச இலாப அளவு :

$$y = R - \pi$$
$$= [75p - 3p^2] - [325 - 9p]$$
$$= 84p - 3p^2 - 325$$

$p = 11$ எனப் பிரதியிட,

$$y \text{ உச்சம்} = (84 \times 11) - (3 \times 11^2) - 325$$
$$= 924 - 363 - 325$$
$$= 236.$$

$\therefore$ உச்ச இலாப அளவு 236 ஆகிறது.

உதாரணம் 3

வானொலிப் பெட்டிகளை உற்பத்தி செய்யும் ஒரு சர்வாதீன நிறுவனமானது, ஒரு வார காலத்தில் x பெட்டிகளை உற்பத்தி

செய்வதற்கு ஆகும் மொத்தச் செலவு £ $\frac{1}{25}x^2 + 3x + 100$ ஆகும். இதற்கேற்ற அங்காடித் தேவை $x = 75 - 3p$ என்ற சார்பின்படி அமைகிறது. £ p என்பது சராசரி விலையினைக் குறிக்கும். இச் சர்வாதீனத்தில் அமையும் மொத்த உற்பத்தி x, அதற்கேற்ற விலை p, இவற்றினை மதிப்பிடுக. நிகர இலாபத்தினைக் கணக்கிடுக. தகுந்த வரைபடத்தின் மூலம் இச் சமநிலையினைக் காட்டுக.

இச் சர்வாதீன நிறுவனம் உற்பத்தியினைக் கட்டுப்படுத்துவதாகக் கொள்க.

தேவைச் சார்பு $x = 75 - 3p$

அல்லது $p = \frac{75 - x}{3}$.

$\therefore$ மொத்த வருவாய் $R = \frac{75x - x^2}{3}$

எனவே, இறுதிநிலை வருவாய் $\frac{dR}{dx} = \frac{75 - 2x}{3}$.

மொத்தச் செலவு $\pi = \frac{1}{25}x^2 + 3x + 100$.

$\therefore$ இறுதிநிலைச் செலவு $\frac{d\pi}{dx} = \frac{2}{25}x + 3$.

நிகர இலாப அளவு

$y = R - \pi$.

முக்கிய நிபந்தனை: $\frac{dR}{dx} = \frac{d\pi}{dx}$.

அதாவது $\frac{75 - 2x}{3} = \frac{2}{25}x + 3$.

அல்லது $1875 - 50x = 6x + 225$.

$\therefore 56x = 1650$

$\therefore x = 29{\cdot}5 \div 30$.

போதிய நிபந்தனை : $\frac{d^2 R}{dx^2} < \frac{d^2 \pi}{dx^2}$

அதாவது $-\frac{2}{3} < \frac{2}{25}$.

எனவே, 30 பெட்டிகளை உற்பத்தி செய்கையில், நிறுவனத்தின் நிகர இலாபமானது உச்சநிலை அடையும்.

$x = 30$ எனப் பிரதியிட,

$$p = \frac{75 - 30}{3} = \frac{45}{3} = 15 \text{ ஆகிறது.}$$

∴ சர்வாதீன விலையானது £ 15 ஆகிறது. இந்நிலையில், உச்ச அளவு நிகர இலாபமானது,

$$y = R - \pi$$

$$= \left(\frac{75x - x^2}{3}\right) - \left(\frac{1}{25}x^2 + 3x + 100\right)$$

$$= \frac{1}{75}(1875x - 25x^2 - 3x^2 - 225x - 7500)$$

$$= \frac{1}{75}(1650x - 28x^2 - 7500)$$

இதில் $x = 30$ எனப் பிரதியிட,

$$y \text{ உச்சம்} = \frac{1}{75}(1650 \times 30 - 28 \times 30^2 - 7500)$$

$$= \frac{1}{75}(16800) = 224 \text{ ஆகும்.}$$

பயிற்சிகள்

வரி விதிக்கப்படாத சர்வாதீன நிலை

1. சர்வாதீனத்தில், தேவைச் சார்பு $p = 20 - 4x$ என்றும், சராசரிச் செலவு $\pi = 4$ என்ற மாறிலியாகவும் அமைந்திருப்பின், உச்ச இலாப அளவினை மதிப்பிடுக. முதலில், இலாப அளவினை x-ஐச் சார்ந்ததெனவும், அதன் பின் p-ஐச் சார்ந்ததெனவும் கருதி, இரு முறைகளும் ஒரே தீர்வைத் தருகின்றன என்று காண்க.

2. சர்வாதீனத்தில், தேவை மற்றும் மொத்தச் செலவுச் சார்புகள் முறையே $p = 12 - 4x$; $\pi = 8x - x^2$, $(0 \leqslant x \leqslant 3)$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருப்பின், உச்ச இலாப அளவின் மதிப்பிடுக. வரைபடத்தின் மூலம் விளக்குக.

3. ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $p = 300 - 2D$ என்றும், சராசரிச் செலவு $\pi = x$ என்றும் தரப்பட்ட சர்வாதீன நிலையில், (i) நிகர இலாபத்தினை உச்சமாக்கும் உற்பத்தி அளவு; (ii) பொருளின் விலை, மற்றும் (iii) சர்வாதீனனின் உச்ச இலாப அளவு ஆகியவற்றினைத் தீர்மானிக்க.

4. ஒரு பொருளினது தேவையானது $p = 10 \cdot e^{-2x}$ என்ற சார்பின்படியும், அதன் சராசரி உற்பத்திச் செலவு $\pi = \frac{1}{x}$ எனவும் கொடுக்கப்படும் நிலையில், இலாப அளவானது உச்ச நிலையை அடையத்தக்க நிபந்தனைகளைக் கண்டறிக. மேலும், இதில் நிர்ணயிக்கப்படும் சமநிலையானது மாறுத் தன்மையினை (stable) உடையதெனக் காட்டுக. [சென்னை, செப். '71]

5. ஒரு சர்வாதீன நிறுவனத்தின் தேவை மற்றும் உற்பத்திச் செலவுச் சார்புகளாவன : $x = 75 - 3p$; $\pi = 100 + 3x$. அதன் உச்ச இலாப அளவினைக் கண்டறிக. சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை வளைவுகளின் மூலமாக இதனை வரைபடத்தில் வரைந்து விளக்கம் தருக.

6. ஒரு விற்பனைச் சர்வாதீனனின் தேவை மற்றும் மொத்தச் செலவுச் சார்புகள் $p = 12 - 5x$, $(0 \leqslant x \leqslant 2)$ $\pi = x^3 + 3x^2$ என்ற நிலையில், உச்ச இலாப அளவினைக் கண்டறிக.

7. வானொலிப் பெட்டிகளை உற்பத்தி செய்யும் ஒரு சர்வாதீன நிறுவனத்தின் மொத்த உற்பத்திச் செலவானது

$$£\ \frac{1}{25} x^2 + 3x + 100$$

எனவும், அங்காடித் தேவையின் அளவு $x = 100 - 20\sqrt{p}$ எனவும் அமைந்திருக்கும் நிலையில், உச்ச அளவு சர்வாதீன இலாபத்தினைப் பெறத் தக்க அளவில், அந்நிறுவனமானது 25 பெட்டிகளை உற்பத்தி செய்வது போதுமானது என்று காட்டுக. சர்வாதீன விலையின் அளவையும் தீர்மானிக்க.

8. ஒரு சர்வாதீனனின் மொத்த உற்பத்திச் செலவு $\pi = ax^2 + bx + c$ என்பதாகும். அவனது உற்பத்திப் பொருளின் தேவை அளவானது $p = \beta - \alpha x^2$ (α, β என்பவை மாறிலிகள், > 0) என்ருல் உச்ச அளவு இலாபத்தை அவனுக்கு அளிக்கத் தக்க உற்பத்தி அளவானது.

$$x = \frac{\sqrt{a^2 + 3\alpha(\beta - b)} - a}{3\alpha}$$

என்று காட்டுக.

9. ஒரு சர்வாதீனனின் மொத்தச் செலவு $\pi = ax^2 + bx + c$ என்றும், தேவை விதியானது $p = \beta - \alpha \cdot x$ என்றும் இருக்கும் நிலையில், அச்சர்வாதீனன் பொருளினது விலையினை நிர்ணயிப்பதாகக் கொண்டு, சர்வாதீன விலை, உற்பத்தி அளவு ஆகியவற்றைத் தீர்மானம் செய்க. மேலும், அச் சர்வாதீனன் பொருளின் உற்பத்தி அளவினைக் கட்டுப்படுத்துவதாகக் கொள்ளப்படும் நிலையிலும், இதே தீர்வானது கிடைக்கும் எனக் காட்டவும்.

10. மேற்கண்ட (7)-வது கேள்வியில், தேவைச் சார்பானது $x = 10 \cdot \sqrt{25 - p}$ என்று அமையும் நிலையில், உற்பத்தி அளவினைக் கண்டறிக. உச்ச இலாபத்தையும் மதிப்பிடுக.

11. சர்வாதீனனின் தேவை மற்றும் மொத்தச் செலவுச் சார்புகள் முறையே $p = \frac{10}{x^{\frac{3}{4}}}$; $\pi = 5 + x$ என்று கொடுக்கப்படின், நிகர இலாபத்தினை உச்சப்படுத்தும் விலை, உற்பத்தி அளவு ஆகியவற்றினைக் கணக்கிடுக.

12. தேவை மற்றும் மொத்தச் செலவுச் சார்புகள் $p = \sqrt{9 - x}$; $\pi = x$; $(0 \leqslant x \leqslant 9)$. இலாபத்தினை உச்ச மிகுதிப்படுத்தும் விலை மற்றும் உற்பத்தி அளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

13. பொருளின் தேவைச் சார்பு $p = 8 \cdot e^{-\frac{x}{4}}$; மொத்தச் செலவுச் சார்பு $\pi = 3 + \frac{x}{2}$, $(0 \leqslant x \leqslant 8)$ என அமைந்தால், உச்ச இலாப அளவை மதிப்பிடுக.

14. மேற்கண்ட (13)-வது கேள்வியில், தேவைச் சார்பு $p = 10 \cdot e^{-2x}$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ எனக் கொண்டு, $\pi = \frac{1}{2}x + 1$ என்ற உற்பத்திச் சார்புடன், தீர்வு காண்க.

இருமுக சர்வாதீனம் (Bilateral Monopoly)

பொருள் விற்பனையில் மட்டும் ஏற்படும் ஆதீன நிலையானது ஏற்கெனவே பகுத்து ஆயப்பட்டது. ஆனல், பொருள் வாங்கப் படும் நிலையிலும், ஆதீனம் அமைந்திருப்பின், ஒரு சர்வாதீன விற்பனையாளன் ஒரு சர்வாதீன வாங்குபவனைச் சந்திக்கும் நிலையானது ஏற்படுகிறது. நடைமுறையில் இது அவ்வளவாக நிகழ்வதல்ல. சர்வாதீன விற்பனையாளன், இறுதிநிலை வருவாய் இறுதிநிலை செலவுக்கு சமமாகத் தக்க அளவுகோலில் (scale) இயங்க முற்படுகிருன். இலாபமானது உச்சமாக இதற்கு மாருக, சர்வாதீன வாங்குவோனுனவன் இறுதிநிலைச் செலவு இறுதிநிலைப் பயனுக்குச் சமமாக உள்ள அளவு அப் பொருளை வாங்குவதற்கு முற்படுகின்ருன். அதாவது, ஒரு விலை வாங்குபவனுக்குச் சாதகமாகவும், மற்ருெரு விலை விற்பவனுக்குச் சாதகமாகவும் அமையும் நிலையினைக் காண்கிருேம். நிர்ணயிக்கப்படும் விலை, உற்பத்தி அளவு ஆகியவற்றைக் காணுதல் இங்கு இயலுவதில்லை. அதற்கேற்ற பொருளாதாரக் கோட்பாடும் வரையறுக்கப்படவில்லை. சூழ்நிலைக்கு ஏற்ப, விலையானது நிர்ணயிக்கப்படுகின்றது.

பொருளின் விலையினை பேரம் பேசுவதில் (bargain) தனக்குள்ள திறமை மூலமாக சிறந்த பயனைப் பெறுவதே ஒவ்வொருவனின் குறிக்கோளாய் அமைகின்றது. சர்வாதீன விற்பனையாளன் தான் நிர்ணயிக்கும் விலையினை, வாங்குபவனும் ஒத்துக் கொள்ள வேண்டும் என்று விருப்புகின்ருன். அதே போல தனக்கு மிகுந்த பயனுள்ள விலையானது நிர்ணயிக்கப்படுவதை சர்வாதீன வாங்குபவனும் விரும்புகிருன். இதில் எவர் கருத்து வெற்றிபெறும் என்பது தீர்மானிக்க இயலாதது. ஏறத்தாழ, இரு உச்சநிலைகளுக்கிடையில் அமையும் ஒரு ஒப்புதலான சூழ்நிலை ஏற்படுவதெனக் கொள்ளலாம்.

வரிவிதிப்புமூலம் சர்வாதீனத்தில் ஏற்படும் விளைவு (Effect of Taxation on Monopoly)

சர்வாதீனத்தில் உற்பத்தியாகும் ஒரு பொருளுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட வீதத்தில் வரியானது விதிக்கப்படுகையில், அந் நிறுவனத்தின் உற்பத்தி, பொருளின் அளவு, மற்றும் உச்சநிலை இலாபம் ஆகியவை எவ்வாறு பாதிக்கப்படுகின்றன என்பதை இங்கு விரிவாக கருதுவோம். ஏற்கெனவே ஆராயப்பட்ட சர்வாதீன நிலையில், வரி அளவைக் கணக்கில் நாம் கொள்ளவில்லை. பின்வருமாறு இந்நிலை பகுத்து ஆயப்படுகிறது.

ஒரு சர்வாதீன உற்பத்திப் பொருளின்மீது சராசரி வரியானது 't' என்ற குறிப்பிட்ட வீதத்தில் விதிக்கப்படும் பொழுது, அதன் சராசரி உற்பத்தி செலவும் அதே t அளவு அதிகரிக்கக் காணலாம். எனவே, மொத்த உற்பத்திச் செலவானது $t.x$ அளவு அதிகரிக்கும்.

∴ புதிய உற்பத்திச் செலவுச் சார்பு,

$$\pi_1 = \pi + tx$$

: மொத்தச்செலவு + மொத்த வரி

என்றாகும். இச் சார்பினைப் பயன்படுத்தி. நிகர இலாப அளவானது

$y = R - \pi_1$ என அமையும்.

y உச்ச மிகுதியாக, முக்கிய நிபந்தனை :

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d\pi_1}{dx}$$

$$= \frac{d\pi}{dx} + \frac{d}{dx}(t.x)$$

$$\therefore \frac{dR}{dx} = \frac{d\pi}{dx} + t.$$

ஆனால், போதுமான நிபந்தனை

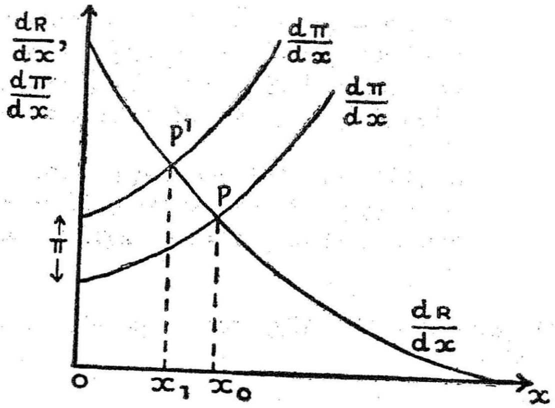
$$\frac{d^2R}{dx^2} < \frac{d^2\pi_1}{dx^2} = \frac{d\pi^2}{dx^2}$$

என்பதே ஆகும்.

இந்நிலையில், உற்பத்திச் செலவு வளைவு 't' அளவு தூரத்திற்கு மேல்நோக்கி நகர்வதனால், உற்பத்தி அளவு குறைந்துவிடுவதையும், இயல்பான தேவை விதியின்மூலம் நிர்ணயிக்கப்பெறும் பொருளின் விலை குறிப்பாகக் காணலாம்.

$\frac{d\pi}{dx}$ வளைவு, வரி உள்ளிடாத இறுதிநிலை உற்பத்திச் செலவையும், $\frac{d\pi_1}{dx}$ வளைவு, வரி உள்ளிட்ட இறுதிநிலைச் செலவையும் குறிக்கின்றன. P-யிலிருந்து சமநிலைப் புள்ளியானது P' என்ற புள்ளிக்கு (மேல் நோக்கி) நகர்ந்து செல்கின்றது. உற்பத்தி x_0 அளவினின்று x_1 ஆகக் குறைந்து வருகின்றது.

வரி விதிப்பின் மூலம், அரசினர் பெறும் மொத்த வருமானம் $T = tx_1$ ஆகும். x_1 ஆனது, வரி விதிப்பின் மூலமாகப் பெறப் படும், நிகர இலாபத்தினை உச்சப்படுத்தும் உற்பத்தி அளவாகும். T-யின் மதிப்பானது, t என்ற மாறியினைப் பொறுத்து மாறும் தன்மையதாகும். எனவே T-ன் உச்ச மதிப்பை, வழக்கம் போல் கணக்கிடலாம்.



படம் 46.

மேற்குறிப்பிட்ட பொதுவான வரியினைத் தவிர, நுகர்வோரது விலைக்கு ஏற்ப அப் பொருளிற்கு விதிக்கப்படும் விற்பனை வரியினைக் கருதுவோமெனில், பின்வரும் நிலை அமையும் :

விற்பனை வரி வீதத்தை $r\%$ எனக் கொண்டால், பொருளின் விலையான p-க்கு அமையும் விற்பனை வரி $t = r.p$ என்பதாகும். இதற்கேற்ற இலாப அளவு பின்வருமாறு :

வரி விதிப்பிற்கு முன்பு விலையானது p என்றும், வரி விதிக்கப்பட்ட பின், $p_1 = p\ (1 + r)$ என்றும் கொள்க. இவ்விலை p_1 ஆனது, தேவை அளவினைக் கட்டுப்படுத்தும் ஒன்றாகும். இதனையே தேவை விதியில் பயன்படுத்த வேண்டும். ஆனால், p என்ற விலையானது, சர்வாதீன மொத்த வருமானத் தினைத் தீர்மானிப்பதால், R சார்பில் $p = \dfrac{p_1}{1 + r}$ எனப் பிரதியிடு கின்றோம்.

∴ நிகர இலாப அளவு

$$y = R - \pi = px - \pi = \frac{p_1 \cdot x}{1 + r} - \pi$$

என்று அமையும். இதில், p, π ஆகியவை x மாறியைச் சார்ந்த சார்புகளாய் இருக்கும். y-ன் உச்ச மதிப்பு, வழக்கம்போல் காணப் படுகிறது.

உதாரணம் 1

தேவைச் சார்பு $p = 10 - 3x$; சராசரி உற்பத்திச் செலவு 3; மேலும், சராசரி வரியானது $t = 1$ என்ற வீதத்தில் விதிக்கப்படின், சர்வாதீன நிலையில், உச்ச மிகுதிபடுத்தப்படும் இலாபத்திற்கு ஏற்ற விலை மற்றும் உற்பத்தி அளவு ஆகியவற்றினைத் தீர்மானிக்கவும்.

(b) இதே நிலையில், வரி வீதமானது t என இருப்பின், பொருளின் விலை மற்றும் உற்பத்தி ஆகியவற்றினைக் கணக்கிடுக. மேலும், வரி வருமானத்தை உச்சநிலைப் படுத்தும் வரி வீதத்தையும் தீர்மானம் செய்க.

(c) இதே நிலையில், 25% விற்பனை வரி விதிக்கப்படுகையில், தீர்வு காண்க :

(a) தேவைச் சார்பு $p = 10 - 3x$;

சராசரிச் செலவு '3'; எனவே

மொத்தச் செலவு : $\pi = 3x$

மொத்த வரி விதிப்பு $tx = 1 \cdot x = x$.

∴ வரி உள்ளிட்ட மொத்தச் செலவு : $\pi_1 = 4x$.

எனவே இறுதிநிலைச் செலவு : $\frac{d\pi_1}{dx} = 4$

$\frac{dR}{dx} = \frac{d\pi_1}{dx}$ என்ற நிபந்தனையிலிருந்து,

$$\frac{d}{dx}(10x - 3x^2) = 4$$

அதாவது $10 - 6x = 4$

அல்லது $6x = 6$ ∴ $x = 1$ ஆகும்.

இதற்கேற்ற விலை $p = 10 - (3 \times 1) = 7$ ஆகும்.

பொருளின் விலை அதிகமாக அமைவது காணத் தக்கது.

போதிய நிபந்தனை :

$$\frac{d^2 R}{dx^2} = -6 < \frac{d^2 \pi_1}{dx^2} = 0.$$

எனவே, $x = 1$, $p = 7$ எனும் நிலையில், இலாபம் உச்ச அளவினதாக அமையும்.

நிகர இலாபம்

$$y = 10x - 3x^2 - 4x$$
$$= 6x - 3x^2$$

$x = 1$ எனப் பிரதியிட,

$$y \text{ உச்சம்} = 6 - 3 = 3.$$

∴ உச்ச இலாபம் '3' ஆகும்.

(b) வரி வீதம் t எனும் நிலை :

∴ மொத்த உற்பத்திச் செலவு :

$$\pi_1 = \pi + t.x$$
$$= 3x + tx = (3 + t)x.$$

$$\therefore \frac{d\pi_1}{dx} = (3 + t).$$

மொத்த வருவாய் $R = 10x - 3x^2$;

$$\therefore \frac{dR}{dx} = 10 - 6x.$$

முக்கிய நிபந்தனை :

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d\pi_1}{dx}$$

$$\therefore 10 - 6x = 3 + t$$

அல்லது $6x = 7 - t$; $x = \frac{7 - t}{6}$.

$\therefore$ விலையானது, $p = 10 - \left[\frac{3 \times (7 - t)}{6}\right]$

$$= \frac{1}{2}(13 + t) \text{ ஆகும்.}$$

போதிய நிபந்தனை :

$$\frac{d^2 R}{dx^2} = -6 < \frac{d^2 \pi_1}{dx} = 0.$$

$\therefore$ $x = \frac{7 - t}{6}$; $p = \frac{1}{2}(13 + t)$ எனும் நிலையில், இலாபம் உச்ச அளவினதாக அமையும்.

$\therefore$ இங்கு, பொருளின் விலையானது, வரியில் அரை மடங்கு $\left(\text{அதாவது } \frac{t}{2}\right)$ அளவு அதிகரிப்பதைக் காண்கிறோம்.

நிகர இலாபம்

$$y = 10 - 3x^2 - (3 + t)x$$
$$= (7 - t)x - 3x^2 \quad \text{ஆகிறது.}$$

$\therefore$ $x = \frac{7 - t}{6}$ எனப் பிரதியிட,

$$y \text{ உச்சம்} = \frac{(7 - t)^2}{6} - 3 \cdot \frac{(7 - t)^2}{36}$$
$$= \frac{(7 - t)^2}{12} \quad \text{ஆகும்.}$$

வரி மூலம் கிடைக்கும் மொத்த வருமானம் $T = tx$ ஆகும்.

அதாவது, $T = \frac{7t - t^2}{6}$.

இதனை உச்சமாக்கும் t மதிப்பானது பின்வருமாறு :

முக்கிய நிபந்தனை :

$$\frac{dT}{dt} = 0$$

அதாவது $\frac{d}{dt}\left(\frac{7t - t^2}{6}\right) = 0.$

அல்லது $\frac{7 - 2t}{6} = 0$

அல்லது $7 - 2t = 0$

$$\therefore \quad t = \frac{7}{2}.$$

....

போதிய நிபந்தனை :

$$\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{7-2t}{6}\right)$$

$$= -\frac{2}{6} < 0.$$

எனவே $t = \frac{7}{2}$ என்ற மதிப்பில், T ஆனது உச்சமாகிறது.

இதைப் பிரதியிட்டு, $x = \frac{7}{12}$; $p = \frac{33}{4}$ என்று பெறுகிறோம்.

$\therefore$ y உச்சம் : $\frac{49}{48}$;

T உச்சம் : $\frac{49}{24}$.

(c) விற்பனைவரி வீதம் 25% என்ற நிலை : பொருளின் விலை $p_1 = p(1 + 0{\cdot}25) = 1{\cdot}25p$ ஆகும்.

அல்லது $p = \frac{4}{5}(10 - 3x)$

$\therefore \quad R = xp = \frac{4}{5}(10x - 3x^2).$ $\quad [\because \; p_1 = 10 - 3x$

நிகர இலாபம்

$$y = \frac{4}{5}(10x - 3x^2) - 3x$$

$$= 5x - \frac{12}{5} \cdot x^2$$

இதனை உச்சநிலைப்படுத்த, நிபந்தனை

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{அதாவது} \quad 5 - \frac{24}{5}x = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{25}{24} \text{ எனப் பெறுகிறோம்.}$$

இதற்கேற்ற விலை மதிப்பு $p_1 = \frac{165}{24}$ ஆகும்.

$\therefore \quad p = \frac{132}{24}$; எனவே, வரி $t = p.r$

$$= \frac{33}{24}.$$

மொத்த வரி வருமானம்:

$$T = \frac{25}{24} \times \frac{33}{24} = 1{\cdot}43.$$

உச்ச அளவு இலாபம் $= \frac{125}{48} = 2.6$

விற்பனை வரியோடுகூடிய விலை, அதிகமாகிறது.

உதாரணம் 2

தேவைச் சார்பு $p = 12 - 4x$ என்றும், மொத்தச் செலவு $x^2 + 2x$ என்றும் தரப்பட்ட சர்வாதீன நிலையில், அதிகப்படி வரியானது t என்ற சராசரி வீதத்தில் விதிக்கப்படுவதாகக் கொண்டு, பொருளின் விலையில் ஏற்படும் மாற்றம், உச்ச நிலையான நிகர இலாபத்தின் மதிப்பு, அரசினர் பெறும் மொத்த வரி வருமானம் ஆகியவற்றினை, t என்ற மாறியினைச் சார்ந்த சார்பு களாகத் தீர்மானம் செய்க. பின்பு அரசினர் பெறும் உச்ச அளவு வரி வருமானத்தினையும் மதிப்பிடுக.

$$\text{தேவை விதி}: \quad p = 12 - 4x;$$

$$\text{மொத்தச் செலவு}: \quad \pi = x^2 + 2x.$$

t என்ற வரி வீதப்படி, மொத்த வரி விதிப்பு. $T = tx.$

$$\therefore \quad R = 12x - 4x^2; \quad \pi_1 = x^2 + 2x + tx$$

$$= x^2 + (2 + t)x$$

எனவே நிகர இலாபம்

$$y = R - \pi_1$$
$$= (12x - 4x^2) - [x^2 + (2 + t)x]$$
$$= (10 - t)x - 5x^2$$

y-ன் உச்ச மதிப்புக்கு, நிபந்தனை :

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{அதாவது} \quad \frac{d}{dx}[(10 - t)x - 5x^2] = 0$$

$$\text{அல்லது} \quad (10 - t) - 10x = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{10}(10 - t) = 1 - \frac{t}{10}.$$

மேலும் $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}[(10 - t) - 10x] = -10 < 0.$

$\therefore \quad x = 1 - \dfrac{t}{10}$ என்ற மதிப்பில், y உச்சமாகிறது.

இம் மதிப்பில், பொருளின் விலை

$$p = 12 - 4x = 12 - 4\left(1 - \frac{t}{10}\right)$$
$$= 8 + \frac{4t}{10} = 8 + 0{\cdot}4\,t$$

$\therefore$ பொருளின் விலையில் ஏற்படும் அதிகரிப்பு $0{\cdot}4{\cdot}t$ ஆகிறது.

உற்பத்தியானது, $0{\cdot}1{\cdot}t$ அளவு குறைகிறது.

$\therefore$ உச்சநிலை இலாப அளவு, $x = 1 - \dfrac{t}{10}$ எனப் பிரதியிட,

$$y \text{ உச்சம்} = (10 - t)\left(1 - \frac{t}{10}\right) - 5\left(1 - \frac{t}{10}\right)^2$$

$$= \frac{1}{100}[10(10 - t)^2 - 5(10 - t)^2]$$

$$= \frac{(10 - t)^2}{20}$$

மொத்த வரி வருமானம்

$$T = tx = t\left(1 - \frac{t}{10}\right) = t - \frac{t^2}{10}.$$

இது உச்சநிலை அடைய, நிபந்தனை :

$$\frac{dT}{dt} = 0 \text{ அதாவது } 1 - \frac{2t}{10} = 0$$

$$\therefore \quad 2t = 10;$$

$$t = 5.$$

மேலும், $\frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{2}{10} < 0.$

$\therefore$ $t = 5$ எனும் பொழுது, T உச்சமாகிறது.

$$\therefore \quad T \text{ உச்சம்} = t - \frac{t^2}{10} = 5 - \frac{(5)^2}{10}$$

$$= 5 - 2{\cdot}5 = 2{\cdot}5$$

$$\therefore \quad T \text{ உச்சம்} = 2{\cdot}5.$$

எனவே,

விலையில் ஏற்படும் மாற்றம் $= +\ 0{\cdot}4t$;

உச்ச அளவு நிகர இலாபம் $= \frac{(10 - t)^2}{20}$;

மொத்த வரி வருவாய் $= t\left(1 - \frac{t}{10}\right)$

உச்ச மொத்த வரி வருமானம் $= 2\ 5$

உதாரணம் 3

ஒரு சர்வாதீனனின் உற்பத்திச் செலவு $\frac{1}{25}x^2 + 3x + 100$ என்ற சார்பின்படியும், அவனது பொருளின் தேவையானது $x = 75 - 3p$ எனும் விதியின்படியும் அமைகின்றன. அப் பொருளின் மீது, சராசரியாக t என்ற வீதத்தில் வரியானது விதிக்கப்படுகின்றது. இந்த வரியை அவன் தனது உற்பத்திச் செலவோடு கூட்டிக்கொண்டு, சர்வாதீன உற்பத்தியையும், விலை

யையும், புதிய சூழ்நிலையில் நிர்ணயிக்கிருன். இந் நிலையில், அப்பொருளின் விலையானது, வரி அளவின் அரைப் பங்கினைவிடக் $\left(\frac{t}{2}\right)$ குறைந்த அளவே அதிகரிக்கிறது எனக் காட்டுக. மேலும், உற்பத்தி குறையும் அளவையும், சர்வாதீன இலாப அளவையும், t-யினைச் சார்ந்த சார்புகளாகத் தீர்மானிக்க. மொத்த வரி வருமானத்தைக் கணக்கிட்டு, இது உச்சநிலையினை அடையத் தக்க வரி வீதத்தினை மதிப்பிடுக.

தேவைச் சார்பு: $x = 75 - 3p$.

அல்லது $p = \frac{75 - x}{3}$.

செலவுச் சார்பு: $\pi = \frac{1}{25} x^2 + 3x + 100$.

t எனும் வீதத்தில் விதிக்கப்படும் மொத்த வரி

$$T = t.x$$

∴ வரி உள்ளிட்ட மொத்தச் செலவு:

$$\pi_1 = \frac{1}{25} x^2 + (3 + t) x + 100.$$

மொத்த வருவாய்: $R = x.p$

அதாவது $R = \frac{75x - x^2}{3}$.

∴ நிகர இலாபமானது

$$y = R - \pi_1$$

$$= \frac{75x - x^2}{3} - \left(\frac{1}{25} x^2 + (3 + t) x + 100\right)$$

$$= (22 - t) x - \frac{28}{75} x^2 + 100.$$

y-ன் உச்ச நிலைக்கான நிபந்தனை:

$\frac{dy}{dx} = 0$; அதாவது

$$\frac{d}{dx}\left[(22-t)x-\frac{28}{75}x^2+100\right]=0.$$

அல்லது $(22-t)-\frac{56}{75}x=0.$

$$\therefore\ x=\frac{75}{56}(22-t)$$

மேலும், $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{56}{75}<0.$

$\therefore$ y-ன் மதிப்பு உச்சமடைகிறது.

எனவே பொருளின் விலையானது,

$$p=\frac{75-x}{3}=52-\frac{1}{3}\left[\frac{75}{56}(22-t)\right]$$

$$=\frac{425}{28}+\frac{25}{56}\cdot t.$$

$\therefore$ உற்பத்தி x ஆனது, $\frac{75}{56}\cdot t$ என்ற அளவு குறைகிறது.

விலை p ஆனது, $\frac{25}{56}\cdot t$ என்ற அளவு அதிகரிக்கிறது. இந்த அதிகரிப்பானது, வரி வீதத்தின் அரைப் பங்கினை (அதாவது, $\frac{t}{2}$) விடக் குறைவாக அமைகிறது.

எனவே, உச்ச இலாப அளவு

$$y\text{ உச்சம்}=(22-t)x-\frac{28}{75}x^2+100$$

$$=(22-t)\cdot\frac{75}{56}\cdot(22-t)$$

$$-\frac{28}{75}\cdot\frac{75}{56}(22-t)^2+100.$$

$$=\frac{75}{56}(22-t)^2-\frac{1}{2}(22-t)^2+100.$$

$$\therefore\ y\text{ உச்சம்}=\frac{47}{56}(22-t)^2+100$$

மொத்த வரி வருமானம் :

$$T = t \cdot x = t \cdot \frac{75}{56} \cdot (22 - t) = \frac{75}{56} (22t - t^2).$$

T-ன் உச்ச மதிப்புக்கு, நிபந்தனை

$$\frac{dT}{dt} = 0 \text{ அதாவது}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{75}{56} (22t - t^2) \right] = 0$$

$$\text{அல்லது } \frac{75}{56} (22 - 2t) = 0.$$

$$\text{அல்லது } 22 - 2t = 0$$

$$\therefore \quad t = 11$$

$$\text{மேலும், } \frac{d^2T}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{75}{56} (22 - 2t) \right] = - \frac{150}{56} < 0.$$

எனவே, $t = 11$ என்ற வரி வீதத்தில், மொத்த வரி வருமானம் உச்சமடைகிறது.

$$\therefore \quad T \text{ உச்சம்} = t \cdot x = \frac{75}{56} (22t - t^2).$$

$$= \frac{75}{56} [(22 \times 11) - (11)^2]$$

$$= \frac{75}{56} [242 - 121]$$

$$= \frac{75}{56} \times 121 = \frac{9075}{56}.$$

$$\therefore \quad T \text{ உச்சம்} = \frac{9075}{56}.$$

ஆகவே, $t = 11$ எனும் நிலையில், சர்வாதீன விலையில்

$$\text{அதிகரிப்பு} = \frac{25}{76} \times 11 = \frac{275}{76} \text{ ஆகும்.}$$

இது ஏறத் தாழ, 33% அளவினதாகக் கணக்கிடப்படுகிறது.

பயிற்சி

1. தேவைச் சார்பு $p = 20 - 4x$; சராசரி உற்பத்திச் செலவு $\pi = 4$. பொருளின் மீது வரி விதம் சராசரியாக '2' என விதிக்கப்படுகையில், சர்வாதீன நிறுவனத்தின் ஊதிய உச்ச மிகுதிப்படுத்தும் விலை மற்றும் உற்பத்தி அளவு ஆகியவற்றினைத் தீர்மானிக்க, உச்ச இலாப அளவையும் மதிப்பீடு செய்க.

2. தேவைச் சார்பு $p = 12 - 4x$; மொத்த உற்பத்திச் செலவு $\pi = 8x - x^2$. அதிகப்படி வரியானது சராசரியாக 't' என்ற விதத்தில் இச்சர்வாதீன நிறுவனத்தின் மீது விதிக்கப் படுகையில் (i) பொருளின் விலையில் ஏற்படும் மாறுபாடு; (ii) அரசினர் பெறும் மொத்த வரி வருமானம் ஆகியவற்றை t-யினைச் சார்ந்த சார்புகளாக தீர்மானிக்க. அதன்பின், அரசினர் பெறும் உச்ச மதிப்பு வரி வருமானத்தையும் நிர்ணயிக்கவும். இதற்கான வரி விதத்தையும் காண்க.

3. பொருளின் தேவை விதியானது $p = (10 - x)^2$ எனவும், மொத்தச் செலவுச் சார்பு $\pi = 55x - 8x^2$ என்றும் அமைந்துள்ள சர்வாதீனத்தில், உற்பத்திப் பொருளுக்கு விதிக்கப்படும் சராசரி வரி விதமானது 9 என்றிருப்பின், அப் பொருளின் விலையானது அவ் வரி விதத்தினைவிட அதிக அளவில் அதிகரிக்கிறதென்று காட்டுக.

4. பொருளின் தேவைவிதி $x = 75 - 3p$; மொத்தச் செலவு $\pi = 100 + 3x$ என்றிருக்கும் நிலையில், செலவுடன் கூட்டத்தக்க t என்ற வரி வீதத்தின்மூலம் அரசினர் பெறும் மொத்த வருவாயின் உச்ச அளவினை மதிப்பிடுக.

5. சர்வாதீனத்தின் தேவைவிதி $p = \beta - \alpha x$ என்றும், அதன் உற்பத்திச் செலவு $\pi = ax^2 + bx + c$ என்றும் அமைந்திருக்கும் நிலையில், வரி வீதம் சராசரியாக t என்று விதிக்கப் படுகையில், ஏற்படும் விளைவுகளைக் கண்டறியவும். மேலும்,

$$t = \frac{1}{2}(\beta - b),\ (\beta > b),$$ என்ற மதிப்பில் மொத்த (வரி) வருமானம் உச்சத்தினை அடைகின்றதெனவும், சர்வாதீன விலையில் ஏற்படும் அதிகரிப்பானது விதிக்கப்பட்ட வரியினைவிடக் குறைவானதாகவே எப்பொழுதும் உள்ளதெனவும் நிரூபிக்க.

6. சர்வாதீனத்தில், தேவை மற்றும் மொத்தச் செலவுச் சார்புகள் $p = \sqrt{24 - x}$; $\pi = x$ என்று கொடுக்கப்படின்,

சராசரி வரி விதிப்பானது 2 எனும் வீதத்தில் அமைவதாகக் கொண்டு. இலாபத்தினை உச்சப்படுத்தும் உற்பத்தி, விலை ஆகிய வற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

7. தேவை மற்றும் செலவுச் சார்புகள் $p = 10/x^{3/4}$ என்றும், $\pi = 5 + x$ என்றும் அமைந்துள்ள சர்வாதீன நிலையில். வரி விதிப்பினை $t = 1$ என்று கொண்டு. இலாபத்தினை உச்சப்படுத்தும் உற்பத்தி அளவினையும், பொருளின் விலையினையும் மதிப்பிடுக. உச்ச இலாப அளவையும் காண்க.

8. தேவைச் சார்பு $p = 20 - 4x$; சராசரிச் செலவு $\pi = 4$ என்ற நிலையில், சர்வாதீனத்தில் உற்பத்தியாகும் பொருளின் ஒவ்வொரு அலகிற்கும் (per unit), 10% விற்பனை வரியானது விதிக்கப்படுகையில், உச்ச அளவு இலாபத்தைக் கொடுக்கும் விலையை தீர்மானிக்க. உச்ச இலாப அளவினையும் மதிப்பிடுக.

9. ஒரு சர்வாதீன நிறுவனத்தின் தேவைச் சார்பு $p = 12 - 5x$; உற்பத்திச் செலவுச் சார்பு $\pi = x^3 + 3x^2$ என்ற நிலையில், சராசரி வரி வீதமானது $t = 2$ என விதிக்கப்படுகையில், அப் பொருளின் விலையில் ஏற்படும் மாறுபாட்டினைக் கணக்கிடுக. 20% விற்பனை வரி விதிக்கப்படும் நிலையில், விளைவு என்ன என்பதையும் காண்க.

10. ஒரு சர்வாதீன நிறுவனதின் தேவைச் சார்பு $p = 20 - x^2$ என்றும், வரி உள்ளிட்ட உற்பத்திச் செலவுச் சார்பு $\pi_1 = (5 + t)x$ என்றும் கொடுக்கப்படுகையில், உச்ச இலாப மதிப்பையும், மொத்த வரி வருமான அளவினையும், t என்ற மாறியினைச் சார்ந் தனவாக மதிப்பிடுக. மொத்த வரி வருமானத்தை உச்ச மிகுதிப் படுத்தும் t-யின் மதிப்பினைத் தீர்மானிக்க. உச்ச அளவு அரசினர் வரி வருமானத்தினையும் மதிப்பிடுக.

15. இரட்டைச் சர்வாதீனம்

(Duopoly)

இந்நிலையானது, இருவர் ஆதீனம் என்றும் கூறப்படும். இருக்கும் நிலையானது. இரு சர்வாதீனர்களால் ஆதிக்கம் செலுத்தப் படுகிறது. முன்பு கருதிய நிலையில், ஒரே ஒரு நிறுவன மானது ஒரு பொருளின் விற்பனைச் சர்வாதீனத்தைப் பெற்றி ருந்தது. ஆனால் இங்கு, ஆதிக்க சக்தியானது இரு நிறுவனங்களி னிடையில் பகிர்ந்து கொள்ளப்படுகிறது. எனவே, இரு சர்வாதீனர் களிடையே போட்டி ஏற்படுவதற்கு வாய்ப்பு உருவாகின்றது.

இதில்,

(1) உற்பத்திப் பொருள் மாறுபடும் நிலை

(2) உற்பத்திப் பொருள் மாறுபடா நிலை

என்று இரு வகைகளைக் காணலாம்.

முதல் நிலையில் பண்ட வேறுபாடு அமைவதாக உள்ளது. இந்நிலையில் ஒவ்வொரு உற்பத்தியாளரிடமும் தொடர்ந்து வாங்கு வோர் தனியாக அமைந்துவிடுவதால், போட்டியாளர்களின் எதிர் நடவடிக்கைகள் பற்றி யாதொரு ஐயப்பாடும் இங்கு தேவை யில்லை. விலைபற்றிய குழப்பம் இங்கு காணப்படுவதில்லை. உற்பத்தி யாளர்கள் ஒரே மாதிரி (identical) அமைவதில்லை யாதலால், சிறந்த பொருட்களை (better goods) அளிப்போரால் அதிக அளவு இலாபம் காண இயலுகிறது.

இரண்டாவது வகையில்தான் பல காரண விளைவுகள் நிகழ இடமிருக்கிறது. இரு சர்வாதீனர்களும் ஒரே பொருளின் உற்பத்தி மற்றும் விற்பனையினைக் கட்டுப்படுத்தலாம். இங்கு பண்ட வேறு பாடு அமைந்திராது. இவ்விருவரும் ஒத்துக்கொள்ளத்தக்க விலை யானது நிர்ணயிக்கப்படும். தத்தம் எல்லைகளை முன்கூட்டியே தீர்மானம் செய்துகொண்டு, அங்காடியினை இருவரும் பகிர்ந்து

கொள்கின்றனர். விலை நிர்ணயித்தலானது, தனிச் சர்வாதீன நிலைக்கு ஒத்ததாக அமைகிறது.

மாறாக, இருவரினிடையே எந்தவித உடன்பாடும் (adjustment) இல்லையெனில், விலை நிர்ணயிப்பானது (price determination) பெரும் பிரச்னையாகிவிடுகிறது. இந்நிலையில் முக்கியக் காரணக் கூறுகளாவன இவரது மொத்த உற்பத்திச் செலவு அளவுகள், நிறுவனங்களின் அமைப்புத் தன்மை (size), தேவை நெகிழ்ச்சியின் இயல்பு, ஒருவரது கொள்கையினுக்கேற்ப மற்றவர் (rival) கருதும் எதிர் நடவடிக்கை, என்பன போன்ற பலவாகும். இருவரது உற்பத்திப் பொருட்களும் எந்தவிதத்திலும் இயல்பில் மாறுபாடின்றி அமையும் நிலையில், நீண்டகால அளவில் (longrun) இருவரது விலை மதிப்புகளும் ஒன்றாகவே (same) இருப்பதால், நுகர்வோர்கள், இருவரையும் சமநோக்குடன் கருதி பொருளினை வாங்கிச் செல்வர். எனவே, இவ்வாறு ஒரே விலைமதிப்பு நிர்ணயிக்கப்படுகையில், அவர்தம் நிகர இலாப அளவுகள் உச்சநிலையை அடைகின்றன.

மேற்கண்ட நிலையினின்று வேறுபட்டு, இரு சர்வாதீனர்களின் உற்பத்திச் செலவுகளும் வெவ்வேறாக இருப்பின், குறைந்த செலவில் உற்பத்தி செய்பவனுக்கு ஏற்படும் அனுகூலத்தினால் (advantage), இரண்டாமவனுடைய விற்பனை மிகவும் பாதிக்கப் படுகிறது. எனவே, இருவர் ஆதீனத்தில், மிகவும் பயன்தரக் கூடிய சூழ்நிலை என்னவெனில், இருவரும் பொருளின் விலை அளவை ஒரே மதிப்பாக நிர்ணயித்து, அங்காடியின் மொத்த விற்பனையையும், நிகர இலாபத்தையும் தம்முள் ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் பங்கிட்டுக் கொள்வதேயாகும்.

குறுகிய கால அளவில் (shortrun) இருவர் ஆதீனத்தில் நிர்ணயிருக்கப்படும் விலை மதிப்பானது, நிறைவுப் போட்டியில் அமையும் விலையினைவிட குறைந்திருக்க வாய்ப்பு உண்டு. ஆனால், நீண்ட கால அளவில் நிர்ணயமாகும் விலை மதிப்பானது, தனிச் சர்வாதீன நிலை மதிப்பிற்கும், நிறைவுப்போட்டி நிலை மதிப்பிற்கும் இடையில் அமைந்திருக்கும்.

கணக்கியல் முறைகளின் மூலமாக, இருவர் ஆதீன நிலையின் தீர்வானது பின்வருமாறு அமையும்:

ஒரே உற்பத்திப் பொருளினை, இரு சர்வாதீனர்கள் பங்கிட்டுக் கொள்வதாகக் கருதுவோம். இந்நிலையில் ஏற்படும் பிரச்னையானது பின்வரும் முறைப்படி தீர்வு காணப்படுகிறது.

X என்ற ஒரு உற்பத்திப் பொருளின் அங்காடித் தேவை, $p = \psi(x)$ என்ற தேவை விதிப்படி கொடுக்கப்படுவதாகக் கொள்க. p என்பது அப் பொருளின் அங்காடி விலையையும், x என்பது மொத்த உற்பத்தியையும் குறிக்கும். கொடுக்கப்பட்ட p என்ற விலையில், அப் பொருளின் உற்பத்தியானது இரு சர்வா தீனங்களால் பகிர்ந்து கொள்ளப்படுகிறது. முதல் சர்வாதீனன் x_1 என்ற உற்பத்தி அளவினை $\pi_1 = F_1(x_1)$ என்ற மொத்த உற்பத்திச் செலவின் மூலமும் இரண்டாம் சர்வாதீனன் x_2 என்ற உற்பத்தி அளவினை $\pi_2 = F_2(x_2)$ என்ற மொத்த உற்பத்திச் செலவு மூலமும் உற்பத்தி செய்வதாக கருதுவோம். பொருளின் அங்காடி (மொத்த) விற்பனை அளவானது இவ்விரு சர்வாதீனர் களிடையே எவ்வாறு பங்கிடப்படுகிறது என்பது தீர்வுக்குரிய பிரச்சினையாகும். இப் பிரச்சினையானது, முதல் சர்வாதீனன் எடுக்கும் முடிவிற்கேற்ப இரண்டாம் சர்வாதீனனிடம் அமையும் பதில் வினைவு அல்லது எதிர்வினைவுத் (reaction) தன்மையின் அடிப்படையில் தீர்க்கப்படுகின்றது.

சிக்கலேதும் இல்லாத, எளிதான இரட்டை சர்வாதீன நிலையில், ஒவ்வொரு சர்வாதீனனும் தன்னுடைய உற்பத்தி அளவை எந்த விதத்தில் மாற்றியபோதும், இரண்டாமவனின் எதிர் நடவடிக்கை மூலம், அப் பொருளின் மொத்த உற்பத்தி வினைவு எவ் விதத்திலும் மாறுவதில்லை என எதிர்பார்க்கிறான். இந்த நிபந்தனைக் கேற்ப, ஒவ்வொரு சர்வாதீனனும், நிகர இலாப அளவை உச்ச நிலைப்படுத்தும் உற்பத்தி அளவினைத் தீர்மானிப்பதைக் குறிக் கோளாகக் கொள்கின்றான்.

இரு சர்வாதீனர்களது உற்பத்தி அளவுகள் x_1, x_2 என்று கொள்க. பொருளின் விலை, $p = \psi(x)$ என்ற தேவைச் சார்பின் படி நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. மேலும் மொத்த உற்பத்தியானது,

$$x = x_1 + x_2$$

என்று பிரிக்கப்படுகிறது.

$\therefore$ முதல் சர்வாதீன நிகர இலாப அளவு

$$y_1 = x_1 \cdot p - \pi_1 \quad \text{என்பதாகும்.}$$

இதனை உச்சப்படுத்த, நிபந்தனையாவது :

$$\frac{dy_1}{dx_1} = 0; \quad \text{அல்லது} \ \frac{d}{dx_1}[x_1 p - \pi_1] = 0.$$

அல்லது $\frac{d}{dx_1}(x_1 \cdot p) = \frac{d\pi_1}{dx_1}$.

$x_1 \cdot p = x_1 \cdot \psi(x)$ என்பதிலிருந்து,

$$\frac{d}{dx_1}(x_1 \cdot p) = \frac{d}{dx_1}[x_1 \cdot \psi(x)]$$

$$= \psi(x) + x_1 \cdot \frac{d}{dx_1}\psi(x)$$

$$= \psi(x) + x_1 \cdot \frac{d}{dx} \cdot \psi(x) \cdot \frac{d}{dx_1}$$

$$= \psi(x) + x_1 \cdot \frac{d}{dx} \cdot \psi(x) \cdot \frac{d}{dx_1}(x_1 + x_2)$$

$$\therefore \frac{d}{dx_1}(x_1 \cdot p) = \psi(x) + x_1 \cdot \frac{d}{dx}\psi(x)$$

$$\left[\because \frac{d}{dx_1}(x_1 + x_2) = 1\right].$$

எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே, x_2 அளவு மாறுத (Constant) மதிப்பாகக் கருதப் படுகையில், கொடுக்கப்பட்ட x_2 மதிப்பிற்கு, முதல் சர்வாதீனனின் மொத்த உற்பத்தி அளவு x_1 ஆனது

$$\psi(x) + x_1 \cdot \psi'(x) = \frac{d\pi_1}{dx_1} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இதே மாதிரியாக, 2-வது சர்வாதீனனுடைய y_2 என்ற இலாப அளவினை உச்சப்படுத்தும் உற்பத்தி அளவினையும் கணக்கிடலாம். அந்நிலையில், முதல் சர்வாதீனனின் உற்பத்தி அளவு x_1-ன் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பிற்கு, இரண்டாம் சர்வாதீனனுடைய உற்பத்தி x_2 என்பதானது, கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டின்படி கொடுக்கப்படும் :

$$\psi(x) + x_2 \cdot \psi'(x) = \frac{d\pi_2}{dx_2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

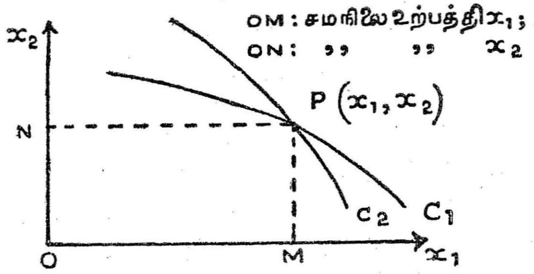
மேற்கண்ட சமன்பாடுகள் (1), (2) ஆகியவை, சர்வாதீனர்களின் உற்பத்தி அளவுகள் x_1, x_2 என்பவற்றினை மதிப்பிட்டு அறியப் போதுமானவை யாகும். இவ்வாறு பெறப்படும் x_1, x_2 மதிப்புகளில்,

$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} < 0$; $\frac{d^2 y_2}{dx_2^2} < 0$ என்ற போதுமான நிபந்தனைகளும் அமைதல் வேண்டும். அப்பொழுதுதான், இலாப அளவுகள் உச்சமாக்கப்படுகின்றன. ∴ பொருளின் மொத்த உற்பத்தி அளவான x-ம், அதற்கேற்ற விலையும் உடன் மதிப்பிடப்படுகின்றன.

மேற்குறிப்பிடப்பட்ட சமன்பாடுகளை ஆராய்வோம். சமன்பாடு (1) ஆனது, முதலாம் சர்வாதீனனின் உற்பத்தியை, இரண்டாமவனின் நிலையான உற்பத்தி (x_2)யின் அடிப்படையில் நிர்ணயம் செய்கிறது. அதாவது, இச் சமன்பாடானது, x_1-ன் மதிப்பை, x_2-வின் குறிப்பிட்ட மதிப்பினைச் சார்ந்த ஒரு சார்பாகத் தீர்மானிக்கிறது. 'இயல்பான' நிலையில் (normal case), x_2-ல் ஏற்படும் அதிகரிப்பானது. x_1 மதிப்பில் ஒரு சிறு அளவு குறைவை (decrease) விளைவிக்கக் காணலாம். x_1-ன் மதிப்பானது இவ்வாறு x_2 மதிப்பைச் சார்ந்துள்ள நிலையினை, ஒரு "எதிர்வினை வளைவு" (reaction curve) மூலம் எடுத்துக் காட்டலாம். $Ox_1 x_2$ என்ற சமதளப் பரப்பில், இது C_1 என்ற வளைவாக வரையப்படும். இவ் வளைவானது, x_2 அச்சினுடன் தொடர்புற்றதாக வரையப்படுகிறது. அதாவது, x_2-ன் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பிற்கேற்ப, x_1 மதிப்பு பெறப்படும். மேலும் x_2 அச்சிலிருந்து, இவ்வளைவின் சாய்வானது (gradient) எதிர்க்கணியமாகவும், (negative), மதிப்பில் < 1 என்றும் காணப்படும். இது இயல்பான நிலை.

இதேபோல், இரண்டாவது சமன்பாடானது, முதல் சர்வாதீனனது உற்பத்தி x_1-ன் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பிற்கு, இரண்டாமவனின் உற்பத்தியான x_2 மதிப்பை நிர்ணயிக்கும். அதாவது, இச்சமன்பாடு, x_2 மதிப்பினை, x_1-ஐச் சார்ந்ததாகக் கொடுக்கும். இத் தொடர்பின் அடிப்படையில், மற்றொரு எதிர்வினை வளைவான C_2 என்பது கிடைக்கும். இவ் வளைவானது x_1 அச்சுடன் தொடர்புடையதாகும். x_1-ன் தரப்பட்ட மதிப்பிற்கேற்ப, x_2-ன் மதிப்பானது மாறுபடுகிறது. இயல்பான நிலையில், x_1-அச்சிலிருந்து கருதப்படும் இவ்வளைவின் சாய்வும் எதிர்க்கணியமாகவும், < 1 என்று மதிப்புடையதாகவும் காணப்படும். C_1, C_2 என்ற இரு வளைவுகளும், P என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் ஒன்றையொன்று வெட்டிச் செல்கின்றன. அப்புள்ளியில் உள்ள ஆயத் தொலைகள் (Coordinates), கருதப்பட்ட இரு சர்வாதீனர்களது சமநிலை உற்பத்தி அளவுகள் (x_1, x_2)

என்பவற்றைத் தருகின்றன. பின்வரும் விளக்கப்படத்தில், இது காட்டப்படும் :



படம் 47.

மேற்கண்ட நிலையில், இரு சர்வாதீனர்களின் செலவுச் சார்புகள் வெவ்வேறு அமைந்திருந்தன. குறிப்பிட்ட நிலையில் (special case) இருவரது மொத்தச் செலவும் $\pi = F(x)$ என்ற பொதுவான சார்பாக அமைந்தால், பிரச்சினையின் தீர்வு பின் வருமாறு அமைந்திருக்கும் :

மொத்த உற்பத்திச் செலவு $\pi = F(x)$

$\therefore$ சராசரி உற்பத்திச் செலவு $\dfrac{d\pi}{dx} = F_1(x)$.

x_1 எனப் பிரதியிட, $\left[\dfrac{d\pi}{dx}\right]_{x = x_1} = F'(x_1)$

என்றும்,

x_2 எனப் பிரதியிட, $\left[\dfrac{d\pi}{dx}\right]_{x = x_2} = F'(x_2)$

என்றும் பெறப்படும்.

எனவே, இரு சர்வாதீனர்களது இலாபத்தினை உச்சமாக்கும் உற்பத்தி அளவுகளை

$$\psi(x) + x_1 . \psi'(x) = F'(x_1);$$
$$\psi(x) + x_2 . \psi'(x) = F'(x_2)$$

என்ற சமன்பாடுகள்மூலம் கண்டறிகிறோம்.

இந்நிலையில், x_2 அச்சிலிருந்து கருதப்படும் c_1 என்ற எதிர் வினை வளைவும், x_1 அச்சிலிருந்து கருதப்படும் c_2 என்ற எதிர்வினை வளைவும் ஒரே வடிவில் அமையக் காணலாம்.

$\therefore$ இவ் வளைவுகள் வெட்டிச் செல்லும் புள்ளியில், $x_1 = x_2$ எனக் காணலாம். அதாவது, இங்கு மொத்த உற்பத்தியை இரு சர்வாதீனர்களும் தம்மிடையே சம அளவில் பங்கிட்டுக் கொள்வர் என்று புலனாகிறது

$$\therefore \quad x_1 = x_2 = \frac{1}{2} x.$$

எனவே, மொத்த உற்பத்தி x-ன் மதிப்பு

$$\psi(x) + \frac{1}{2} x . \psi'(x) = F'\left(\frac{1}{2} x.\right)$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து கண்டறியப்படும்.

இந்த நிலையிலும், ஒரு சிறப்பு நிலையாக (special case), இருவரது மொத்தச் செலவும் மாறிலியாக (constant) அமைகையில், சமமாகப் பங்கிடப்படும் உற்பத்தி அளவு

$$\psi(x) + \frac{1}{2} x . \psi'(x) = 0$$

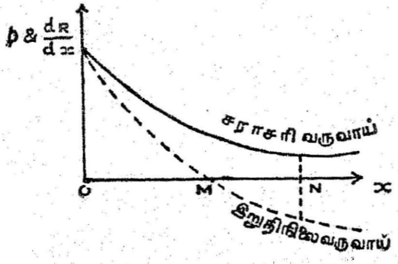
அல்லது $\psi(x) + [\psi(x) + x \psi'(x)] = 0$

அல்லது $\psi(x) + \frac{d}{dx} . \{ x . \psi'(x) \} = 0$

என்பதிலிருந்து பெறப்படும்.

∴ மொத்த உற்பத்தி அளவானது, $p = \psi(x)$ என்ற தேவைச் சார்பினின்று பெறப்படும் சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை வருவாய்களின் கூட்டுத் தொகை பூஜ்யம் என ஆவதற்குத் தக்கதாய் அமைந்திருக்கக் காணலாம். இச் சிறப்பு நிலையானது, பின்வரும் விளக்கப் படமூலம் காட்டப்படுகிறது.

சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை வருவாய் வளைவுகள் படத்தில் கண்டதுபோல் அமைந்திருக்கும். மொத்த உற்பத்தியானது ON என்று இரட்டைச் சர்வாதீன நிலையில் நிர்ணயிக்கப்படும். இந்த உற்பத்தி அளவை, தனித்த சர்வாதீன (independent monopoly) நிலையுடன் ஒப்பிட இயலும். தனிச் சர்வாதீன நிலையில் (single monopolist), மொத்த உற்பத்திச் செலவு மாறிலியாகக் கொள்ளப்படுகையில், சர்வாதீன உற்பத்தியானது, இறுதிநிலைச் செலவு என்ற நிபந்தனைப்படி மதிப்பிடப்படும்.



படம் 48.

(∴ இறுதிநிலை வருவாய் = 0).

மேலே காணப்படும் விளக்கப் படத்தில், ஒற்றைச் சர்வாதீன (monopoly) உற்பத்தி அளவு OM என அமைவதைக் காண்கிறோம். எனவே, இங்கு ஒற்றைச் சர்வாதீன உற்பத்தியானது (monopoly output), இரட்டைச் சர்வாதீன உற்பத்தியை விடக் (duopoly output) குறைந்த அளவினதாகக் காணப்படுகிறது. இது ஒரு குறிப்பிட்ட இரட்டைச் சர்வாதீன நிலையாகும்.

இறுதியாக, பொதுவான இரட்டைச் சர்வாதீன நிலையின் (general duopoly) விரிவான ஆய்வினைக் கருதுவோம். இந் நிலையில். முக்கியமாகக் கருதப்படும் எடுகோளானது, முதலாம் சர்வாதீனன் தன்னுடைய உற்பத்தி x_1 அளவினை மாற்றி அமைப்பதுடன், இரண்டாம் சர்வாதீனனும், ஒரு குறிப்பிட்ட விதிப்படி, அவனுடைய உற்பத்தி x_2 அளவினை மாற்றி அமைத்துக் கொள்ளும் எதிர் வினைவை (reaction) எதிர்பார்க்கிறன் என்பதாகும். இத்தகைய குறிப்பிடட விதியானது $x_2 = f(x_1)$ என இருக்கட்டும். இது ஒருவித ஊகத்தின் அடிப்படையில் அமைகின்றது. இவ்விதம், அவன் தனது உற்பத்தி அளவினை x_1 என்ற மதிப்பிலிருந்து அதிகரிக்கையில், (அல்லது குறைக்கும் நிலையில்), தனது போட்டியாளரின் (rival) உற்பத்தி அளவானது

$$\frac{dx_2}{dx_1} = f'(x_1)$$

என்னும் வகை வேறுபாட்டுக் கெழுவின் மூலமாகக் குறிக்கப்படும் வீதத்தில் விரிவடைவதாகவோ அல்லது குறைவதாகவோ எதிர் பார்க்கிறன். பேராசிரியர் ஃப்ரிஷ் (Professor Frish) அவர்களின் கருத்துப்படி, இந்த வகை வேறுபாட்டுக் கெழுவினை ‘ஊகித்த மாறுபாடு’’ (Conjectural variation) என்று கூறுகிறோம். இதன் மதிப்பானது நேர்க் கணியமாக (+) அல்லது எதிர்க் கணியமாக (—), சூழ்நிலைக் கேற்ப அமையலாம். முதலாம் சர்வாதீனனுடைய நிகர இலாபமானது உச்ச நிலையினை அடைவதற்குரிய நிபந்தனை

$$\frac{dR}{dx_1} = \frac{d\pi_1}{ux_1}$$ என்பதாகும்.

இதில்,

$$\frac{dR}{dx_1} = \frac{d}{dx_1}(x_1 \cdot p)$$

$$= \psi(x) + x_1 \cdot \frac{d}{dx.}(\psi(x)) \cdot \frac{d}{dx_1} \cdot (x_1 + x_2).$$

$$= \psi(x) + x_1 \cdot \psi'(x) \cdot \left(1 + \frac{dx_2}{dx_1}\right)$$

எனவே, முதலாம் சர்வாதீன நிலையில், உற்பத்தி x_1 அளவினை, x_2-வைச் சார்ந்த சார்பாக அளிக்கும் சமன்பாடானது.

$$\psi(x) + x_1 \cdot \psi'(x) \cdot \left(1 + \frac{dx_2}{dx_1}\right) = \text{ஆகும்.}$$ இது C_1 என்ற 'எதிர்வினை வளை' வினைத் தீர்மானிக்கும்.

இதே விதமாக, இரண்டாம் சர்வாதீனனானவன், முதல் சர்வாதீனன் தனது உற்பத்தி அளவை $x_1 = g(x_2)$ என்னும் சார்பின் மூலம் மாற்றி அமைப்பதாக எதிர்பார்க்கிருன். இந்த நிலையில், 'ஊகித்த மாறுபாடு' $\frac{dx_1}{dx_2} = g'(x_2)$ என்று கொடுக்கப் படும். $\therefore x_2$ உற்பத்தி அளவை x_1-ஐச் சார்ந்த சார்பாக நிர்ண யிக்கும் சமன்பாடு,

$$\mu(x) + x_2 \cdot \psi'(x)\left(1 + \frac{dx_1}{dx_2}\right) = \frac{d\pi_2}{dx_2}$$

என அமையும். இது இரண்டாம் சர்வாதீனனின் C_2 என்ற எதிர் வினை வளைவினைத் தீர்மானிக்கும்.

C_1, C_2 ஆகிய இரு எதிர்வினை வளைவுகளும் வெட்டிச்செல்லும் புள்ளி அல்லது புள்ளிகள், இரு சர்வாதீனர்களிடையே பகிர்ந்து கொள்ளப்படும் உற்பத்தி அளவுகளை (x_1, x_2) நிர்ணயிக்கும். அவற்றின் வடிவங்கள், இரு சர்வாதீன நிலைகளிலும் கருதப்படும் 'ஊகித்த மாறுபாட்டு'த் தன்மைகளைப் பொறுத்திருக்கின்றன. இம் மாறுபாடுகளின் தன்மை பற்றிய எடுகோள்களைக் கருதுவதன் மூலம், பல வகைப்பட்ட இரட்டைச் சர்வாதீன நிலைகளை வரை யறுத்து ஆய்வதற்கு இயலும்.

உதாரணம் 1

இரு சர்வாதீனர்கள் x வானொலிப் பெட்டிகளை,

$$£\, \frac{1}{25} x^2 + 3x + 100$$

என்ற உற்பத்திச் செலவின்படி உற்பத்தி செய்கின்றனர். இருவரும் ஒரே வகையான இயல்புடைய பெட்டிகளை உற்பத்தி செய் கின்றனர். ஒரு பெட்டியின் சராசரி விலையானது £p என்று அமையும் நிலையில், அங்காடித் தேவையானது $x = 75 - 3p$ என்று இருக்கும். இந்நிலையில், சமநிலை அளவு உற்பத்தியானது மொத்தமாக 41 பெட்டிகள் (ஏறத்தாழ) என்று காட்டுக. இதனைத் தனிச் சர்வாதீன நிலையுடன் ஒப்பிடுக.

இங்கு இருவரது மொத்தச் செலவுகளும் $\pi = F(x)$ என்ற பொதுச் சார்பின் படி தரப்படுகின்றன. அதாவது,

$$\pi = \frac{1}{25} x^2 + 3x + 100.$$

எனவே $\frac{d\pi}{dx} = \frac{2}{25} x + 3.$

$x = x_1$ என்று பிரதியிட,

$F'(x_1) = \frac{2}{25} x_1 + 3$ என்றாகும்.

$x = 75 - 3p$ என்பதிலிருந்து, $p = \frac{75 - x}{3} = \psi(x).$

எனவே, $\psi(x) + x_1 \cdot \psi'(x) = F'(x_1)$

என்ற நிபந்தனையின் படி,

$$\frac{75 - x}{3} + x_1 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{75 - x}{3}\right) = \frac{2}{25} x_1 + 3.$$

அல்லது $\frac{1}{3}(75 - x) + \left(-\frac{1}{3}\right) x_1 = \frac{2}{25} x_1 + 3.$

மேலும், இந்நிலையில் உற்பத்திச் செலவானது இருவருக்கும் ஒரே சார்பின் மூலம் தரப்படுவதால், மொத்த உற்பத்தியினை அவர்கள் தம்முள் சமமாகப் பகிர்ந்து கொள்கின்றனரென அறிவோம்.

$$\therefore \quad x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \cdot x.$$

எனவே, நிபந்தனையானது,

$$\psi(x) + \frac{1}{2} x \psi'(x) = F'\left(\frac{1}{2} x\right)$$

என்ற பொதுவான சமன்பாடாக அமைகின்றது.

அதாவது,

$$\frac{75 - x}{3} + \frac{1}{2} x \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{25} \cdot \left(\frac{1}{2} x\right) + 3$$

ஆகும்.

$$\text{அல்லது } 25 - \frac{x}{3} - \frac{x}{6} - \frac{1}{25}x - 3 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{27}{50}x = 22$$

$$\therefore \quad x = \frac{22 \times 50}{27}$$

$$= 40 \cdot 1$$

$$= 41 \text{ (ஏறத்தாழ)}.$$

எனவே. கொடுக்கப்பட்ட இருவர் ஆதீனத்தில், உற்பத்தியின் அளவு 41 பெட்டிகள் என்று கணக்கிட்டறியப்படும்.

தனிச் சர்வாதீன நிலையில். இதே கணக்கிற்குப் பெறப்பட்ட தீர்வானது, உற்பத்தி அளவினை 50 பெட்டிகளாகக் கணக்கிட்டது. எனவே. இரு நிலைகளும் ஒப்பிடப் படுகையில், இருவர் ஆதீன நிலையில் மொத்த உற்பத்தியானது அதிகரித்திருப்பதைக் காண்கிறோம். ∴ இரு சர்வாதீனர்களது உற்பத்தி அளவுகளும்

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}x = 20 \cdot 5$$

என நிர்ணயிக்கப்படும்.

பொருளின் விலை

$$p = \frac{75 - x}{3} = 25 - \frac{x}{3}$$

$$= 25 - \frac{41}{3} = 11 \cdot 3.$$

∴ பொருளின் விலை £ 11·3 என மதிப்பிடப்படும்.

உதாரணம் 2

உதாரணம் (1)-ல், மொத்தச் செலவு மாறுத நிலையில், தேவை விதியானது $x = 10\sqrt{25 - p}$ என அமைகின்றதென்ற நிலையில், முதல் சர்வாதீனனுடைய எதிர்வினை வளைவு

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x_2^2 + 10x_2 + 6616} - 2x_2 - 4\right)$$

என்றும், இதே போன்று இரண்டாம் சர்வாதீனனுடைய எதிர் வினை வளைவும் தரப்படும் என்றும் காட்டுக. இவ் விரண்டு வளைவுகளையும் படம் வரைந்து விளக்குவதோடு, மொத்த உற்பத்தியானது இந் நிலையில் 32 பெட்டிகள் என்று உத்தேசமாகப் பெறப்படுகிறதென்று காட்டுக. இதனையும் தனிச் சர்வாதீன நிலையுடன் ஒப்பிடுக. (சென்னை; ஏப்ரல் '69)

முதல் சர்வாதீனன் :

மொத்தச் செலவு : $\pi_1 = \frac{1}{25} x_1^2 + 3x_1 + 100.$

$\therefore$ இறுதிநிலைச் செலவு $\frac{d\pi_1}{dx_1} = \frac{2}{25} x_1 + 3$

தேவைச் சார்பு $x = 10\sqrt{25 - p}.$

அல்லது $x^2 = 100\,(25 - p)$

அல்லது $p = \frac{2500 - x^2}{100}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \psi'(x) = -\frac{x}{50}.$$

நிபந்தனையாவது,

$$\psi(x) + x_1 \cdot \psi'(x) = \frac{d\pi_1}{dx_1}.$$

அதாவது,

$$\frac{2500 - x^2}{100} + x_1 \cdot \left(-\frac{x}{50}\right) = \frac{2}{25} \cdot x_1 + 3.$$

$$(2500 - x^2) - 2x \cdot x_1 = 8x_1 + 300.$$

அல்லது $2200 - (x_1 + x_2)^2 - 2x_1(x_1 + x_2) - 8x_1 = 0.$

அல்லது,

$$3x_1^2 + x_1 \cdot (4x_2 + 8) + (x_2^2 - 2200) = 0$$

(x_2 என்பது, இதில் நிலையான மதிப்பைப் பெற்றதாகும்.)

இச் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறப்படும் x_1-ன் மதிப்பானது

$$x_1 = -\frac{(4x_2+8) \pm \sqrt{(4x_2+8)^2 - 12(x_2^2 - 2200)}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{(2x_2+4)^2 - 3x_2^2 + 6600} - (2x_2+4)}{3}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{\sqrt{x_2^2 + 16x_2 + 6616} - 2(x_2+2)}{3}$$

எனப் பெறுகிறோம். இதன் மூலம், முதலாம் சர்வாதீனனுடைய எதிர்வினை வளைவு பெறப்படுகிறது. இதேபோல, இரண்டாம் சர்வாதீனுடைய வளைவு

$$x_2 = \frac{\sqrt{x_1^2 + 16x_1 + 6616} - 2(x_1+2)}{3}$$

என்று தரப்படுகிறது. இவற்றை வரைபடத்தில் காட்டலாம்.

குறிப்பாக, $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}x$ என்ற நிலையில், நிபந்தனையானது,

$$\psi(x) + \frac{x}{2} \cdot \psi'(x) = F'\left(\frac{x}{2}\right)$$

எனவே,

$$\frac{2500 - x^2}{100} + \frac{x}{2} \cdot \left(-\frac{x}{50}\right) = \frac{2}{25}\left(\frac{x}{2}\right) + 3$$

அல்லது $(2500 - x^2) - x^2 = 4x + 300$

$$\therefore \quad x^2 + 2x - 1100 = 0.$$

$$\text{எனவே,} \quad x = \frac{-2 + \sqrt{4404}}{2}$$

$$= \frac{-2 + 66{\cdot}3}{2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{64{\cdot}3}{2} = 32{\cdot}15 \doteqdot 32.$$

∴ மொத்த உற்பத்தி 32 பெட்டிகள் ஆகும்.

உதாரணம் 3

ஒரு பொருளின் தேவை அளவு $p = \beta - \alpha x$ என்று கொடுக்கப்படுகிறது. அங்காடியில் இரு சர்வாதீனர்கள் $\pi_1 = a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c_1$; $\pi_2 = a_2 x_2^2 + b_2 x_2 + c_2$ என்ற மொத்தச் செலவுகளுடன் காணப்படுகின்றனர். 'ஊகித்த மாறு பாடுகள்' (conjectural variations) பூஜ்யமெனக் கொண்டு, இந்த இரு சர்வாதீனர்கட்கும் உரிய எதிர்வினை வளைவுகள் நேர் கோட்டு வடிவில் அமைந்திருப்பதாகக் காட்டவும். ஒவ்வொரு சர்வாதீனனுக்கும் உள்ள சமநிலை உற்பத்தி அளவினையும் தீர்மானிக்க.

மொத்தச் செலவு: (முதலாம் சர்வாதீனன்):

$$\pi = a_1 \cdot x_1^2 + b_1 \cdot x_1 + c_1.$$

எனவே, $\frac{d\pi_1}{dx_1} = 2a_1 \cdot x_1 = b_1.$

தேவை விதி:

$$p = \beta - \alpha x.$$

$$\therefore \quad \psi'(x) = \frac{d}{dx}(\beta - \alpha x) = -\alpha.$$

எனவே, நிபந்தனை:

$$\psi(x) + x_1 \psi'(x) = \frac{d\pi_1}{dx_1}.$$

அல்லது $(\beta - \alpha x) - \alpha x_1 = 2a_1 x_1 + b_1$

$$\therefore \quad \beta - \alpha(x_1 + x_2) - \alpha x_1 - 2a_1 x_1 - b_1 = 0.$$

$$\therefore \quad 2(\alpha + a_1) x_1 = (\beta - b_1) - \alpha \cdot x_2$$

எனவே, $$x_1 = \frac{(\beta - b_1) - \alpha x_2}{2(\alpha + a_1)}.$$

இது முதற்படி (first degree)ச் சமன்பாடாகும். ∴ முதல் எதிர்வினை வளைவு நேர்கோட்டு வடிவில் அமைகின்றது.

இதேபோல, இரண்டாம் சர்வாதீனனின் நிபந்தனையும் பின்வருமாறு அமையும் :

$$\psi(x) + x_2 \psi'(x) = \frac{d\pi_2}{dx_2}$$

அல்லது $(\beta - \alpha x) - \alpha x_2 = 2a_2 \cdot x_2 + b_2$

அல்லது $\beta - \alpha(x_1 + x_2) - \alpha x_2 - 2a_2 \cdot x_2 - b_2 = 0$

அல்லது $2(\alpha + a_2) x_2 = (\beta - b_2) - \alpha x_1$

$$\therefore \quad x_2 = \frac{(\beta - b_2) - \alpha x_1}{2(\alpha + a_2)}$$

இதுவும் நேர்கோட்டு வடிவில் உள்ளது. சமநிலை உற்பத்தி அளவுகள் ;

$$x_1 = \frac{1}{2(\alpha + a_1)} \cdot (\beta - b_1) - \alpha \left(\frac{\beta - b_2 - \alpha x_1}{2(\alpha + a_2)} \right).$$

$$= \frac{1}{4(\alpha + a_1)(\alpha + a_2)} [2(\alpha + a_2)(\beta - b_1) - \alpha(\beta - b_2 - \alpha \cdot x_1)]$$

$$\therefore \left[1 - \frac{\alpha^2}{4(\alpha + a_1)(\alpha + a_2)} \right] x_1 [2(\alpha + a_2)(\beta - b_1) - \alpha(\beta - b_2)]$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{2(\alpha + a_2)(\beta - b_1) - \alpha(\beta - b_2)}{\left[1 - \frac{\alpha_9}{4(\alpha + a_1)(\alpha + a_2)} \right]}$$

இதேபோல், x_2-ன் மதிப்பினையும் தீர்மானிக்கலாம்.

16. இணைப்பு உற்பத்தியும் சர்வாதீன நிலையும், காரணிகளின் தேவையை நிர்ணயித்தலும்

(Joint Production and Monopoly and determination of Demand for Factors)

இணைப்பு உற்பத்தியும் சர்வாதீனமும்

இந்த அத்தியாயத்தில் இணைப்பு உற்பத்தியைப்பற்றி ஆராயும் முன்னர், இரு மாறிகளுடன் தொடர்புடைய சார்பின் உச்ச மற்றும் சிறும மதிப்புக்களை கணித (முறையில்) வடிவில் எவ்வாறு காணலாம் என்பதை முதலில் கண்டறிவோம்.

இரு மாறிகளுடன் தொடர்புடைய சார்பின் உச்ச மற்றும் சிறும மதிப்புகள்

$z = f(x, y)$ என்ற சார்பின் உச்ச சிறும மதிப்புகளைப் பகுதி வகையீடு மூலம் நிர்ணயிக்கிறோம். இச் சார்பு ஒற்றை மதிப்புடையதாகவும், தொடர்ச்சியானதாகவும் அமையட்டும். பின்வரும் நிபந்தனைகள் அமைந்திருக்க வேண்டும்:

z-ன் வேறுபாடு dz என்பதானது பூஜ்யமாக இருக்க வேண்டும். அப்போதுதான் நிலையான (stationary) மதிப்புகள் காணப்படும்.

∴ முக்கிய நிபந்தனை :

$dz = 0$ (x, y-ன் எல்லா மாறுபாடுகட்கும்).

அதாவது,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

∴ பகுதி வகையீட்டுக் கெழுக்கள் பூஜ்யமாக வேண்டும். இதுபொதுவான நிபந்தனை.

போதுமான நிபந்தனை :

z-ன் இரண்டாம் நிலைப் பகுதி வகையீட்டுக் குணகங்கள் இரண்டும் நேர்க்கணியமாக (+) அல்லது எதிர்க் கணியமாகவோ (−) அமைந்திருப்பதைப் பொறுத்து உச்ச மற்றும் சிறும மதிப்புகள் முறையே அமைந்திருக்கும்.

∴ (x_0, y_0) என்ற மதிப்பில்.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ & $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ இரண்டும் < 0 என்றால், z உச்ச மதிப்பினை அடையும்.

மாறாக, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ இரண்டுமே > 0 எனில், z சிறும மதிப்பினை அடையும்.

இந்நிபந்தனைகளுடன், மற்றொரு மூன்றாவது நிபந்தனையும் அமைந்திருக்க வேண்டும். அதாவது, z-ன் உச்ச/சிறும மதிப்பில்,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2$$

என்ற சமனிலியும் பொருந்துதல் அவசியம்.

மூன்றாவது நிபந்தனை பொருந்தவில்லை எனில், z என்ற சார்பினுக்கு உச்ச/சிறும மதிப்புகள் எதுவும் அமைவதில்லை என முடிவு செய்கிறோம். இந்தச் சமனிலி நிபந்தனை மூலமாகவே, z-ன் உச்ச/சிறும மதிப்புகளை இனம் கண்டு கொள்ள இயலுகிறது.

உதாரணம்

$$z = -2x^2 - 3y^2 + 4x + 12y - 8.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -4x + 4; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -6y + 12.$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

என்பவற்றிலிருந்து, $x = 1$; $y = 2$ எனப் பெறுகிறோம்.

மேலும், $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4 < 0$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6 < 0.$$

$$\& \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

$$\therefore \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 24 > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 0.$$

∴ (x, y) சமதளத்தில் ஒரே ஒரு புள்ளியான $(1, 2)$ என்பதில், z-ன் உச்ச மதிப்பு அமைகிறது.

∴ z உச்சம் : $-2 - 12 + 4 + 24 - 8$

$= 6.$

z-ன் மதிப்புகளைக் காண்க :

(i) $z = 28 + x^2 + 2xy + 4y^2$;

(ii) $z = 48 - x^2 + 3xy - 3y^2$;

(iii) $z = 48 - 4x^2 - 4xy - 2y^2 + 16x + 12y$;

(iv) $z = 2x + y - x^2 + xy - y^2$.

இணைப்பு உற்பத்தியும் சர்வாதீன நிலையும் (Joint Production & Monopoly)

இரு உற்பத்திப் பொருள்களின் அளிப்பு மற்றும் விற்பனையினை ஒரு சர்வாதீன நிறுவனம் கட்டுப்படுத்தும்பொழுது, அப் பொருட்களின் விலைகள் மற்றும் தேவை அளவுகள் ஆகியவற்றினைக் கணக்கியல் அடிப்படையில் நிர்ணயித்தல் இங்கு கருதப்படுகின்றது. இத்தகைய ஆய்வானது. இரு பொருட்கள் இணைந்து உற்பத்தி செய்யப்படும் நிலையில் அவசியமாகிறது. உதாரணமாக, பருத்தி உற்பத்தியில், பஞ்சு, பருத்தி விதை என்ற இணைப்புப் பொருட்கள் ஏக காலத்தில் உற்பத்தியாகின்றன. இப் பொருட்கள் (விலையினைப் பொறுத்த அளவில்) தம் முள் ஒன்றோடொன்று தொடர்புள்ளவையாகும். தொழில் நுட்ப அடிப்படையில் இத் தொடர்பு அமையும் நிலையில், இதனைக் கருதுவது அவசியமாகிறது.

சர்வாதீனத்தில், X_1, X_2 என்ற பொருட்களின் உற்பத்தி அளவுகள் x_1, x_2 என்பவை $\pi = F(x_1, x_2)$ என்னும் மொத்த (இணைப்பு)ச் செலவில் (joint cost) பெறப்படுவதாகக் கொள்க. நுகர்ச்சியில் அப் பொருட்கள் ஒன்றோடு ஒன்று தொடர்புள்ளவையாக அமையும். அப் பொருட்களின் தேவை விதிகளை $x_1 = \varphi_1(p_1, p_2)$; $x_2 = \varphi_2(p_1, p_2)$ என்று கொள்க. p_1, p_2 என்பவை அவற்றுக்கு அமையும் விற்பனை விலைகளைக் குறிக்கின்றன. X_1-ன் மூலம் கிடைக்கும் மொத்த வருவாய் $x_1 p_1$ என்றும், X_2-ன் மூலம் கிடைப்பது $x_2 p_2$ என்றும் அறிவோம்.

∴ நிறுவனத்தின் நிகர இலாப அளவு

y : மொத்த வருவாய் — மொத்தச் செலவு

$$: (x_1 p_1 + x_2 p_2) - \pi$$

என்பதாகும். கொடுக்கப்பட்ட தேவை விதிகளின் அடிப்படையில், y-ன் மதிப்பினை, p_1, p_2 என்ற விலைகளைச் சார்ந்த சார்பாகக் கொள்ளலாம். இச் சர்வாதீனமானது, நிகர இலாபத்தினை உச்சமிகுதிபடுத்தும் அளவிற்கு இரு பொருட்களின் விலைகளான p_1, p_2 ஆகியவற்றை நிர்ணயிப்பதாக கருதுகிறோம்.

எனவே, நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்தி, தேவை அளவு மற்றும் உச்ச இலாப அளவு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுகிறோம். 'தனி' உச்ச இலாப அளவு ஒரு புள்ளியில் அமைகையில், சர்வாதீனனுக்குத் தனது தேவைப் பட்டியலினை மாற்றியமைக்க வேண்டிய நிலை இல்லாது போய் விடுகிறது. இந்நிலையில் பொருளாதார நிலைப்புத் தன்மை (economic stability) அமைவதாகக் கருதப்படும்.

[தேவை விதிகள் x_1, x_2 என்ற மாறிகளைச் சார்ந்தனவாக கொடுக்கப்படின், இலாபத்தினை x_1, x_2 வினைச் சார்ந்ததெனக் கருதி, உச்ச மதிப்பைக் காணலாம்.]

இங்கு, நிகர இலாப அளவான

$$y = (x_1 p_1 + x_2 p_2) - \pi$$

என்ற சார்பின் உச்ச மதிப்பினைப் பின்வருமாறு பெறலாம்.

முக்கிய நிபந்தனை :

$$\frac{\partial y}{\partial p_1} = \frac{\partial y}{\partial p_2} = 0.$$

$\frac{\partial v}{\partial p_1} = 0$ என்பதிலிருந்து,

$$\left[x_1 + p_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1} - \frac{\partial \pi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right] + \left[p_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} - \frac{\partial \pi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1}\right] = 0$$

அதாவது, $$x_1 + \left(p_1 - \frac{\partial \pi}{\partial x_1}\right) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \left(p_2 - \frac{\partial \pi}{\partial x_2}\right) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (16 \cdot 1)$$

என்ற சமன்பாட்டையும்,

$\frac{\partial v}{\partial p_2} = 0$ என்பதிலிருந்து,

$$x_2 + \left(p_1 - \frac{\partial \pi}{\partial x_1}\right) \frac{\partial x_1}{\partial p_2} + \left(p_2 - \frac{\partial \pi}{\partial x_2}\right) \frac{\partial x_2}{\partial p_2} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (16 \cdot 2)$$

என்ற சமன்பாட்டினையும் பெறுகிறோம்.

(1), (2) இவற்றைத் தீர்ப்பதன்மூலம், பொருட்களின் விலைகளான p_1, p_2 ஆகிய மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம். இவ்வாறு பெறப்பட்ட p_1, p_2 மதிப்புகளில், உச்ச மதிப்புக்கான போதுமான நிபந்தனைகளும் பொருந்தியிருக்கும் நிலையில், அம் மதிப்புகளில் நிகர இலாபமானது உச்ச நிலையினை அடைவதெனக் கருதப்படும்.

பின்வரும் எளிய உதாரணத்தினைக் கருதுக (simple case):

தேவை மற்றும் செலவுச் சார்புகள் நேர்கோட்டு வடியில் அமைந்திருக்கும். செலவுச் சார்பு $\pi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ எனவும், தேவைச் சார்புகள்

$x_1 = a_1 - a_{11} \cdot p_1 - a_{12} \cdot p_2$; $x_2 = a_2 - a_{12} p_1 - a_{22} \cdot p_2$ என்றும் அமைவதாகக் கொள்வோம்.

α_1, α_2 என்பவை X_1, X_2 என்ற பொருட்களின் சராசரி உற்பத்திச் செலவுகளாகும்.

$a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{22} \rightarrow$ மாறிலிகள்.

நிறைவுப் போட்டியில், சராசரிச் செலவுகட்குச் சமமாக உள்ள விலைகள் நிர்ணயிக்கப்படும் நிலையில், பொருட்களின் தேவைகளை முறையே,

$x_{10} = a_1 - a_{11} \cdot \alpha_1 - a_{12} \cdot \alpha_2$; $x_{20} = a_2 - a_{12} \cdot \alpha_1 - a_{22} \cdot \alpha_2$
எனக் குறிப்பிடலாம். அப்பொழுது,

$$x_1 = x_{10} - a_{11} \cdot (p_1 - \alpha_1) - a_{12} \cdot (p_2 - \alpha_2);$$

$$\& \; x_2 = x_{20} - a_{12} \cdot (p_1 - \alpha_1) - a_{22} \cdot (p_2 - \alpha_2)$$

என்று பெறப்படும்.

∴ சர்வாதீன நிகர இலாபமானது

$$y = x_1 p_1 + x_2 p_2 - \pi$$

$$= x_1 \cdot (p_1 - \alpha_1) + x_2 \cdot (p_2 - \alpha_2) \text{ ஆகும்.}$$

∴ $\frac{\partial y}{\partial p_1} = 0$ என்பதிலிருந்து,

$$x_1 + (p_1 - \alpha_1) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + (p_2 - \alpha_2) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0$$

அதாவது,

$$x_{10} - 2a_{11} \cdot (p_1 - \alpha_1) - 2a_{12} \cdot (p_2 - \alpha_2) = 0 \quad \dots (1)$$

என்றும்,

$\frac{\partial y}{\partial p_2} = 0$ என்பதிலிருந்து,

$$x_{20} - 2a_{12} \cdot (p_1 - \alpha_1) - 2a_{22} \cdot (p_2 - \alpha_2) = 0 \quad \dots (2)$$

என்றும், இரு சமன்பாடுகளைப் பெறுகிறோம்.

இவற்றைத் தீர்ப்பதன் மூலமாக, நிகர இலாபத்தை உச்ச மதிப்பாக்கும் p_1, p_2 விலைகளைத் தீர்மானிக்கிறோம்.

அவை:

$$p_1 = \alpha_1 + \frac{a_{22} \cdot x_{10} - a_{12} \cdot x_{20}}{2(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2)};$$

$$\& \; p_2 = \alpha_2 + \frac{a_{11} \cdot x_{20} - a_{12} \cdot x_{10}}{2(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2)}$$

என்பதாகக் கண்டறியப்படுகின்றன.

இரண்டாம் நிலைப் பகுதி வகையீட்டுக் கெழுக்கள்

$$\frac{\partial^2 v}{\partial p_1^2} = -2a_{11}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial p_1 . \partial p_2} = -2a_{12}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial p_2^2} = -2a_{22},$$

ஆகும்.

$\therefore$ a_{11}, a_{22} மதிப்புகள் நேர்க்கணியமாகவும் (+),

$a_{12}^2 < a_{11} . a_{22}$ என்ற நிபந்தனைகட்கு உட்பட்டும் இருப்பின், நிர்ணயிக்கப்பட்ட p_1, p_2 என்ற விலை மதிப்புகள் உச்ச இலாபத்தினை அளிப்பனவாக இருக்கும். மாறிலி மதிப்புகட்கு இந் நிபந்தனைகள் அவசியமாகின்றன.

இது தொடர்புடைய சர்வாதீன நிலையாகும்.

இனி, எந்தவிதத் தொடர்புமற்று, தனித்து (independent) இயங்கும் இரு சர்வாதீனர்கள் X_1, X_2 என்னும் உற்பத்திப் பொருட்களை, $\pi_1 = \alpha_1 . x_1$: $\pi_2 = \alpha_2 . x_2$ என்ற உற்பத்திச் செலவுகளில் முறையே உற்பத்தி செய்வதாகக் கருதுவோம். ஒவ்வொரு சர்வாதீனனும், மற்றொருவன் அவனுடைய நிர்ணயித்த விலையினை மாற்றுவதில்லை என்று கொள்கிறான். ஒவ்வொருவனும் தனது நிகர இலாப அளவினை உச்சநிலைப்படுத்த முயல்கிறான்.

முதல் சர்வாதீனனது நிகர இலாப அளவு

$$y_1 = x_1 . p_1 - \pi_1 = x_1 (p_1 - \alpha_1) \text{ ஆகும்.}$$

தேவை விதியானது, x_1 மதிப்பை ஏற்கெனவே கண்டது போலக் கொடுக்கிறது. p_2-ன் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புக்கு, உச்ச அளவு இலாபமானது

$$\frac{dv_1}{dp_1} = 0 \text{ என்பதன் மூலம் நிர்ணயிக்கப்படும்.}$$

அதாவது,

$$x_{10} - 2a_{11} . (p_1 - \alpha_1) - a_{12} . (p_2 - \alpha_2) = 0 \quad \ldots \quad \text{(I)}$$

இதேபோன்று, இரண்டாம் சர்வாதீனனுடைய முக்கிய நிபந்தனை

$$x_{20} - a_{12} . (p_1 - \alpha_1) - 2a_{22} (p_2 - \alpha_2) = 0 \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

என்பதாக அமையும்.

சமன்பாடுகள் (I), (II) ஆகியவற்றை தீர்ப்பதன் மூலம், தனித்த இரு சர்வாதீனர்களுடைய விலை மதிப்புகளையும் பின் கண்டவாறு தீர்மானிக்கிறோம்.

$$p_1 = \alpha_1 + \frac{a_{22} \cdot x_{10} - \frac{1}{2} \cdot a_{12} \cdot x_{20}}{2\left(a_{11} \cdot a_{22} - \frac{1}{4} a_{12}^2\right)};$$

$$p_2 = \alpha_2 + \frac{a_{11} \cdot x_{20} - \frac{1}{2} a_{12} \cdot x_{10}}{2\left(a_{11} \cdot a_{22} - \frac{1}{4} a_{12}^2\right)}.$$

மேலும், இரண்டாம் நிலைப் பகுதி வகையீட்டுக் கெழுக்கள்

$$\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial p_1^2} = -2a_{11} < 0; \quad \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial p_2^2} = -2a_{22} < 0$$

என அமைந்திருப்பதால், நிர்ணயிக்கப்பட்ட விலைகள் p_1, p_2 ஆகியவற்றில், நிகர இலாபமானது உச்ச நிலையில் அமையும்.

மேற்கண்ட இரு நிலைகளிலிருந்தும், பின்வரும் உண்மைகள் அறியப்படும்.

a_{12} மதிப்பு எதிர்க் கணியமாய் இருப்பின், (பொதுவான நிலையில்). இரண்டு பொருட்களும் நுகர்ச்சியில் போட்டியிடும் தன்மையனவாக அமையும். அதாவது, ஒன்றை மற்றொன்றிற்குப் பதிலீடாக (sutsitute) பயன்படுத்த இயலும். இந்நிலையில் இணைப்புச் சர்வாதீன விலைகள், தனிச் சர்வாதீன விலைகளைவிட அதிகமாக அமையும். இணைப்புச் சர்வாதீன உற்பத்தியின் விளைவாக, உற்பத்தி (x) யானது, கட்டுப்படுத்தப்பட்டும், பொருளின் விலை (p) அதிகப் படுத்தப்பட்டும் அமையும்.

2-வது நிலையில், a_{12} மதிப்பு நேர்க் கணியமாகவும், பொருட்கள் நிறைவு செய்வனவாகவும் (complementary) இருக்கையில், இருவகை உபநிலைகள் அமைகின்றன :

$$(1) \quad a_{12} < a_{11} \cdot \frac{x_{20}}{x_{10}}; \quad a_{12} > a_{22} \cdot \frac{x_{10}}{x_{20}}.$$

இங்கு இணைப்புச் சர்வாதீன விலைகளில், $(p_1 - \alpha_1)$ என்பது எதிர்க்கணியமாக (—)வும், $(p_2 - \alpha_2)$ என்பது நேர்க் கணியமாக (+)வும் அமைந்திருக்கும். அதாவது கருதப்பட்ட இணைப்புச் சர்வாதீனத்தில், X_1 என்ற பொருளானது, α_1 என்ற அதன் சராசரிச் செலவினைவிட மிகவும் குறைந்த விலையில்

(இழப்பைத் தரும் வண்ணம்) விற்கப்படுகின்றது. இவ்வாறு, சராசரிச் செலவினைவிடக் குறைந்த இந்த விலையானது, தனியான சர்வாதீன விலையினை விடக் குறைந்ததேயாகும். இரண்டாவது பொருளின் விற்பனை அளவினை அதிகரிக்கும் பொருட்டு, ஒரு பொருளை இவ்வாறு 'இழப்புத் தன்மை' (loss leader) உடையதாகக் கொள்வதானது அச் சர்வாதீனனுக்குச் சாதகமாக அமைகிறது. இந்நிலைக்கான (உத்தேச) நிபந்தனைகளாவன : பொருட்கள் நல்ல வலிவான போட்டியிடும் தன்மை உடையனவாகவும் (a_{12} மதிப்பு உயர்ந்து), 'இழப்புத் தன்மை' வாய்ந்ததெனக் கொள்ளப்படும் பொருளின் தேவையானது அதன் விலை மாறுபாடுகட்கு நெகிழும் வண்ணமும் (a_{11} மதிப்பு உயர்ந்து) அமைதல் இன்றியமையாதது. உதாரணமாக, இரேஸர்களையும் (razors) பிளேடுகளையும் (blades) உற்பத்தி செய்யும் சர்வாதீனன், இரேஸர்களின் விலையைக் குறைப்பதன் மூலம் (தேவை நெகிழும் தன்மையது)—செலவினைவிடக் குறைவு—பிளேடுகளின் மொத்த விற்பனை அளவினை அதிகரிக்க இயலுகிறது (தேவையானது குறைவான நெகிழ்ச்சி உடையதாகவும், இரேஸர்களுக்கு இணையான நுகர்வுத் தன்மை உடையதாகவும் உள்ளது)

$$(2) \quad a_{12} < a_{11} \cdot \frac{x_{20}}{x_{10}} \; ; \; a_{12} < a_{22} \cdot \frac{x_{10}}{x_{20}} .$$

இங்கு, இணைப்புச் சர்வாதீன விலைகட்கு, $(p_1 - \alpha_1)$ மற்றும் $(p_2 - \alpha_2)$ ஆகியவை நேர்க்கணியமாக அமைவதால், இரண்டு விலைகளுமே α_1, α_2 என்ற சராசரி செலவுகளை விட அதிகமானதாய் அமைகின்றன. இவ்விரு விலைகளும், தனிச் சர்வாதீனத்தில் நிர்ணயிக்கப் படுவனவற்றைவிட அதிகமாகவோ, அல்லாமலோ இருக்கலாம். பல நிலைகளில் அமைவது போன்று, பொருட்களிடையே உள்ள தொடர்பானது, (a_{12} எனும் மதிப்பின்படி) விலைகளின் தேவையில் நிகழும் நேரடி விலைவுகளுடன் (a_{11} a_{22} மதிப்புக்களின்படி) ஒப்பிடுகையில், மிகவும் வலிவற்ற நிலையில் இருக்கையில், இந்த நிலை காணப்படும்.

உதாரணம் 1

ஒரு சர்வாதீன நிறுவனமானது, நிலையான சராசரிச் செலவுகள் 2·5, 3 (ஷில்லிங்குகள்) ஆகியவற்றுடன், இரு சாக்லேட் வகைகளை (X_1, X_2) உற்பத்தி செய்கின்றன. p_1, p_2 என்ற விலைகளில், அப் பொருட்களின் அங்காடித் தேவைகள்

$$x_1 = 5(p_2 - p_1); \quad x_2 = 32 + 5p_1 - 10p_2$$

ஆகும் (வாரத்திற்கு, 1000 பவுண்டுகளில்). இணைப்புச் சர்வாதீன வருவாய் உச்சநிலை அடைய, விலைகள் (ஏறத் தாழ) 4·5, 4·75 (ஷில் லிங்குகள்) என்று நிர்ணயிக்கப்படுவதாக நிரூபிக்கவும்.

சராசரிச் செலவுகள்

$$\alpha_1 = 2{\cdot}5\ ;\quad \alpha_2 = 3.$$

$\therefore$ மொத்தச் செலவு $\pi = 2{\cdot}5x_1 + 3x_2$.

மேலும் $x_1 = 5\,(p_2 - p_1)$

$$\therefore\quad x_1 \cdot p_1 = 5p_1\,(p_2 - p_1)\ ;$$

$$x_2 = 32 + 5p_1 - 10p_2$$

$$\therefore\quad x_2\,p_2 = p_2\,(32 + 5p_1 - 10p_2).$$

$\therefore$ உச்சநிலைப் படுத்தவேண்டிய இலாபச் சார்பு

$$y = 5p_1\,(p_2 - p_1) + p_2\,(32 + 5p_1 - 10p_2) - [2{\cdot}5x_1 + 3x_2]$$

$$= 10p_1\,p_2 - 5p_1^2 - 10p_2^2 + 49{\cdot}5p_2 - 2{\cdot}5p_1 - 96.$$

$\frac{\partial y}{\partial p_1} = 0$ என்பதிலிருந்து

$$10p_2 - 10p_1\ 2{\cdot}5 = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

என்றும்,

$\frac{\partial v}{\partial p_2} = 0$ என்பதிலிருந்து,

$10p_1 - 20p_2 + 49{\cdot}5 = 0$ என்றும் ... (2)

பெறுகிறோம். (1), (2) இவற்றைத் தீர்க்க,

$$10p_2 = 47 \qquad \therefore\ p_2 = 4{\cdot}7\ ;$$

$$\&\ \ 10p_1 = 44{\cdot}5 \qquad \therefore\ p_1 = 4{\cdot}45$$

என்று பெறுகிறோம்.

எனவே, சாக்லேட் வகைகளின் விலைகள் $p_1 = 4{\cdot}45$; $p_2 = 4{\cdot}7$ (ஷில்லிங்குகள்) என நிர்ணயிக்கப்பெறும்.

உதாரணம் 2

உதாரணம் (1)-ல், தனிச் சர்வாதீன நிலைகளில் பொருட்களுக்கு நிர்ணயிக்கப்படும் விலைகளைத் தீர்மானித்து, அவை இணைப்புச் சர்வாதீன விலைகளைவிடக் குறைந்து அமைவதைக் காட்டுக.

முதலாம் சர்வாதீனன் :

சராசரி செலவு $= \alpha_1 = 2\cdot5$

$\therefore$ மொத்தச் செலவு: $2\cdot5x_1$.

மொத்த வருவாய்: $5p_1(p_2 - p_1)$.

$\therefore$ நிகர இலாபம்

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1p_1 - \alpha_1 \cdot x_1 \\ &= 5p_1(p_2 - p_1) - 2\cdot5x_1 \\ &= 7\cdot5(p_1^2 - p_1p_2). \end{aligned}$$

y_1 உச்சமாக, முக்கிய நிபந்தனை :

$$\frac{\partial y_1}{\partial p_1} = 0 \text{ அதாவது } 7\cdot5(2p_1 - p_2) = 0. \quad \ldots \quad (1)$$

இரண்டாம் சர்வாதீனன் :

சராசரி செலவு $: \alpha_2 = 3;$

$\therefore$ மொத்தச் செலவு $: 3x_2$

மொத்த வருவாய் $: p_2(32 + 5p_1 - 10p_2)$

$\therefore$ நிகர இலாபம்

$$\begin{aligned} y_2 &= p_2(32 + 5p_1 - 10p_2) - 3x_2 \\ &= 20p_2^2 - 10p_1p_2 - 64p_2 \end{aligned}$$

y_2 உச்சமாக, முக்கிய நிபந்தனை :

$$\frac{\partial y_2}{\partial p_2} = 0 \text{ அதாவது } 40p_2 - 10p_1 + 64 = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2) இவற்றைத் தீர்க்க,

$$7p_2 = 12\cdot8 \quad \therefore \quad p_2 = 1\cdot8;$$

$$\& \quad 2p_1 = 1\cdot8 \quad \therefore \quad p_1 = 0\cdot9.$$

எனவே இங்கு நிர்ணயிக்கப்படும் விலைகள், இணைப்பு சர்வாதீன நிலையைவிட குறைந்து அமையக் காணலாம்.

உதாரணம் 3

இணைப்பு சர்வாதீனத்தில், பொருட்களின் தேவை விதிகள் $p_1 = 36 - 3x_1$; $p_2 = 40 - 5x_2$ என்றும், இணைப்புச் செலவு $\pi = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$ என்றும் அமைந்தால் நிகர இலாப அளவை உச்சப்படுத்தும் விலைகளையும், உற்பத்தி அளவுகளையும் தீர்மானித்து, உச்ச இலாப அளவினையும் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டவை :

தேவைச் சார்புகள் :

$$p_1 = 36 - 3x_1\,;\quad p_2 = 40 - 5x_2.$$

$\therefore$ மொத்த வருவாய் சார்புகள்

$$p_1x_1 = 36x_1 - 3x_1^2\,;\quad p_2x_2 = 40x_2 - 5x_2^2$$

மொத்தச் செலவு: $\pi = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2.$

$\therefore$ நிகர இலாபமானது (உச்சநிலைப்படுத்தப்பட)

$$\begin{aligned} y &= p_1x_1 + p_2x_2 - \pi \\ &= 36x_1 - 3x_1^2 + 40x_2 - 5x_2^2 - x_1^2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2 \\ &= 36x_1 + 40x_2 - 4x_1^2 - 2x_1x_2 - 8x_2^2 \end{aligned}$$

[இங்கு y ஆனது x_1, x_2 மாறிகளில் கருதப்படுவது குறிப்பிடத் தக்கது.]

முக்கிய நிபந்தனை :

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0 \text{ அல்லது } 36 - 8x_1 - 2x_2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0 \text{ அல்லது } 40 - 2x_1 - 16x_2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2) இவற்றைத் தீர்க்க, $x_1 = 4$; $x_2 = 2$ எனப் பெறுகிறோம்.

மேலும், $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = -8 < 0$; $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = -16 < 0$;

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\,\partial x_2} = -2.$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial x_2^2} = 128 > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 4.$$

∴ y உச்சமாகும் மதிப்பு (4, 2) ஆகும்.

இதனைப் பிரதியிட,

$$p_1 = 36 - 12 = 24 \; ; \quad p_2 = 40 - 10 = 30 \; ;$$

$$y \text{ உச்சம்} = (24 \times 4) + (30 \times 2) - (16 + 16 + 12)$$
$$= 112.$$

உதாரணம் 4

போட்டியிடும் இரு பொருட்களின் தேவைச் சார்புகள்.

$$x_1 = 7 - p_1 + p_2 \; ; \quad x_2 = 6 + p_1 - 2p_2$$

என்றும், அப்பொருள்களின் சராசரி உற்பத்திச் செலவுகள் 3, 2 என்ற மாறிலிகள் என்றும் அமைகின்றன. பொருள்களின் விலைகள், தேவை அளவுகள், இவற்றினை. ஊதியம் உச்ச மிகுதிப்படுத்தப் படுவதெனக் கொண்டு மதிப்பிடுக.

மொத்த வருவாய் : $p_1 x_1 + p_2 x_2$

மொத்தச் செலவு : $3x_1 + 2x_2$

$(\because \; \alpha_1 = 3 \; ; \; \alpha_2 = 2).$

∴ நிகர இலாப அளவு

$$\begin{aligned} y &= p_1 x_1 + p_2 x_2 - (3x_1 + 2x_2) \\ &= (p_1 - 3)\, x_1 + (p_2 - 2)\, x_2 \\ &= (p_1 - 3)(7 - p_1 + p_2) + (p_2 - 2)(6 + p_1 - 2p_2) \\ &= -p_1^2 + 2p_1 p_2 - 2p_2^2 + 8p_1 + 7p_2 - 33. \end{aligned}$$

y உச்சமாக, நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்துவோம். கிடைக்கும் சமன்பாடுகள்,

$$\frac{\partial y}{\partial p_1} = 0 \text{ அதாவது } -2p_1 + 2p_2 + 8 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_2} = 0 \text{ அதாவது } 2p_1 - 4p_2 + 7 = 0$$

இவற்றைத் தீர்க்க, $p_1 = \frac{23}{2}$; $p_2 = \frac{15}{2}$

என்று பெறுவோம்.

மேலும் $\frac{\partial^2 y}{\partial p_1^2} = -2$; $\frac{\partial^2 y}{\partial p_1 \partial p_2} = 2$; $\frac{\partial^2 y}{\partial p_2^2} = -4$.

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 y}{\partial p_1^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial p_2^2} = 8 > \left(\frac{\partial^2 y}{\partial p_1 \partial p_2}\right)^2 = 4.$$

எனவே $p_1 = \frac{23}{2}$; $p_2 = \frac{15}{2}$

என்ற நிலையில், y உச்சநிலை அடைகிறது.

இம் மதிப்புகளில் $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{5}{2}$;

$$y \text{ உச்சம்} = 39{\cdot}25$$

என மதிப்பிட்டு அறிகிறோம்.

பயிற்சிகள்

1. சர்வாதீனத்தில், மலிவான ரேஸர்களும் (razors), பிளேடு களும் (blades), ரேஸருக்கு 2 ஷில்லிங், ஒரு டஜன் பிளேடு களுக்கு 1 ஷில்லிங் என்ற சராசரிச் செலவுகளுடன் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்றன. ஒரு வாரத்தில் தேவைப்படும் அளவுகள் $x_1 = \frac{10}{p_1 \cdot p_2}$ ஆயிரம் ரேஸர்களாகவும், $x_2 : \frac{20}{p_1 p_2}$ ஆயிரம் டஜன்கள் அளவு பிளேடுகளாகவும், p_1, p_2 என்ற சராசரி விலை களில், அமைந்துள்ளன. இந்நிலையில், இணையாக நிர்ணயிக்கப் படும் சர்வாதீன விலைகள் ரேஸருக்கு 4 ஷில்லிங் எனவும், டஜன் பிளேடுகளுக்கு 2 ஷில்லிங்காகவும் அமைவதைக் காட்டுக.

2. மேற்கண்ட கணக்கில், அங்காடித் தேவைகள் $x_1 = 11 - 2p_1 - 2p_2$ என்றும், $x_2 = \frac{67}{4} - 2p_1 - \frac{11}{4}\ p_2$ எனவும் அமைந்திருப்பின், இணைப்புச் சர்வாதீனன் ரேஸர்களையும், பிளேடுகளையும் உயர்ந்த விலையில் விற்பதைக் காட்டுக.

3. ஒரு நிறுவனமானது இரு உற்பத்திப் பொருட்களை x_1, x_2 என்ற அளவுகளில் உற்பத்தி செய்யும் நிலையில், அப் பொருளின்

தேவை விதிகள் $p_1 = 16 - x_1^2$; $p_2 = 8 - 2x_2$ என்று அமைகின்றன. இணைப்புச் செலவுச் சார்பு $10 + 4x_1 + 2x_2$ எனில், அவற்றின் விலைகள், தேவை அளவுகள், உச்ச இலாப ஆகியவற்றினைத் தீர்மானிக்கவும்.

4. பின்வரும் நிலைகளில், இணைப்புப் பொருட்களின் விலைகள், தேவை அளவுகள் ஆகியவற்றை, உச்ச இலாபம் பெறத்தக்க அளவில், நிர்ணயிக்கவும். உச்ச இலாபத்தினையும் மதிப்பிடவும் :

(i) தேவை விதிகள் : $p_1 = 36 - 3x_1$; $p_2 = 40 - 5x_2$.

இணைப்புச் செலவு : $\pi = 12x_1 + 20x_2$.

(ii) தேவை விதிகள் : $p_1 = 20 - 2x - x_2$;

$p_2 = 12 - x_1 - x_2$.

மொத்தச் செலவு : $x_1^2 + 2x_2^2$.

(iii) தேவை விதிகள் : $x_1 = 11 - 2p_1 - 2p_2$;

$x_2 = 16 - 2p_1 - 3p_2$

மொத்தச் செலவு : $3x_1 + x_2$.

(பொருட்கள் நிறைவு செய்வனவாகும்)

(iv) தேவை விதிகள் : $p_1 = 40 - 2x_1^2$; $p_2 = 12 - 3x_2$.

மொத்தச் செலவு : $8 + 4x_1 + 3x_2$.

(v) தேவை விதிகள் : $p_1 = 8 - 2x_1$; $p_2 = 4 - x_2^2$.

மொத்தச் செலவு : $10 + 4x_1 + 2y_1$.

(vi) தேவை விதிகள் : $p_1 = 16 - x_1^2$; $p_2 = 9 - x_2^2$.

இணைப்புச் செலவு : $x_1^3 + 3x_2^2$.

5. இரு பொருட்களின் தேவைக் கோட்பாடுகள் $p_1 = 28 - 3D$, எனவும், $p_2 = 22 - 2D_2$ எனவும், இணைப்புச் செலவு $D_1 + 3D_2^2 + 4D_1 D_2$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டால், உச்ச அளவு இலாபம் அமையத் தேவையான நிபந்தனைகளைப் பெறுக. பொருட்களின் விலைகள், உற்பத்திச் செலவு, உச்ச இலாப அளவு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

6. இரு இணைப்புப் பொருட்களின் தேவைகள் $p_1 = 35 - 4D_1$; $p_2 = 26 - D_2$ என்றும், அவற்றின் இணைப்புச் செலவானது $D_1^2 + D_2^2 + 3D_1 D_2$ எனவும் அமைந்திருப்பின், உச்ச இலாபம் அடையத்தக்க விலைகள், தேவை அளவுகள் இவற்றினைத் தீர்மானிக்க உச்ச இலாபத்தினையும் மதிப்பிடுக.

(D_1, D_2 என்பவை பொருட்களின் தேவைகளைக் குறிப்பன வாகும்).

7. இரு இணைப்புப் பொருட்களின் தேவைகள் $p_1 = 80 - 8D_1$; $p_1 = 100 - 2D_2$ எனவும், மொத்த உற்பத்திச் செலவு $C = 20D_1 + 2D_2 + 2D_1^2 + 2D_2^2 - 2D_1 D_2$ எனவும் அமையும் சர்வாதீனத்தின் உச்சநிலை இலாப அளவு பெறத்தக்க $p_1 \cdot p_2 \cdot x_1 \cdot x_2$ மதிப்புகளைக் கண்டறிக. உச்ச அளவு இலாபம் எவ்வளவு ?

8. மூன்று இணைப்புப் பொருட்களின் தேவைச் சார்புகள் முறையே $p_1 = 10 - 3D_1$; $p_2 = 20 - 5D_2$; $p_3 = 60 - 7D_3$ ஆகும். மொத்த உற்பத்திச் செலவு $C = 10 + 5D_1 + 2D_2 + 6D_3$. இந்நிலையினுக்கேற்ற ஊதியம் உச்சப்படுத்தப்பட, பொருட்களின் விலைகள், மொத்தச் செலவு ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக. உச்ச இலாபத்தினையும் கணக்கிடுக.

நிறைவுப் போட்டியில், இரு காரணிகளைப் பயன்படுத்தி உற்பத்தி காணுதல்

ஒரு தொழில் நிறுவனமானது (firm) இரு உற்பத்திக் காரணிகளைப் பயனபடுத்தி ஒரு பொருளினை உற்பத்தி செய்வதாகக் கருதுவோம். நிறைவுப் போட்டி நிபந்தனை விளைவாக, ஒரு தனிப்பட்ட தொழில் நிறுவனமானது பொருளின் விலையையோ, (product price & factor prices) மாற்றியமைக்க இயலுவதில்லை. பொருளின் விலை, பல்வேறு நிறுவனங்களினிடையே உள்ள போட்டி மூலமாக நிர்ணயிக்கப்படுவதாகும்.

பிரச்சினையை விரிவாகக் கருதுவோம். இரு காரணி அளவுகளை a, b என்ற மாறிகளாகவும், அவற்றின் மூலம் பெறப்படும் மொத்த உற்பத்தி விளைவினை x என்ற மாறியாகவும் கொள்க. உற்பத்திச் சார்பு $x = f(a, b)$ என்பதாகும். மேலும், காரணிகளின் நிலையான விலைகளை r_a, r_b எனவும், உற்பத்தி பொருள் விலையை p_x எனவும் குறிப்பிடுக. இந்த நிலையில், அந் நிறுவனத்தின நிகர இலாப அளவு (net revenue),

$$y = x \cdot px - a \cdot p_a - b \cdot r_b$$
$$= px \cdot f(a, b) - a r_a - b \cdot r_b$$

என்பதாகும். அதாவது, மொத்த வருவாய்க்கும், மொத்தச் செலவுக்கும் இடையில் உள்ள வேறுபாடு நிகர இலாபமாய்ப் பெறப்படும்.

தனது உற்பத்தி விலை, மற்ற நிறுவனங்களைச் சார்ந்திராது எனக் கொண்டு, இந் நிறுவனமானது, மேற் குறிப்பிடப்பட்ட இலாப அளவினை உச்ச மிகுதிப்படுத்த (maximize) விழைகிறது. இதற்கான மிக முக்கியமான மற்றும் போதுமான (necessary & sufficient) நிபந்தனைகளாவன :

(i) $\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\partial y}{\partial b} = 0$;

(ii) $\frac{\partial^2 y}{\partial a^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial b^2}$ இரண்டும் < 0.

மேலும், $\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial b^2} > \left(\frac{\partial^2 y}{\partial a \, \partial b}\right)^2$

நிகர இலாப அளவினைக் குறிப்பிடும் y என்ற சார்பின் இரண்டாம்படி (நிலை) (second order) வகை வேறுபாட்டுக் கெழுக்கள், உற்பத்திச் சார்பான $f(a, b)$யின் இரண்டாம் நிலை வகை வேறுபாட்டுக் கெழுக்களது தன்மையினையே பெற்றிருக்கக் காணலாம். எனவே, ஒரு புள்ளியில் உற்பத்திச் சார்பானது உச்ச மதிப்பினைப் பெற்றிருக்கையில், உச்ச அளவு இலாபமானது நிலையானதாக அமைகிறது.

குறிப்பிடப்பட்ட மூன்றாவது சமனிலி (inequality)யானது, உச்ச மதிப்பு அமைவதற்கான போதிய நிபந்தனையின் முக்கியக் கூறுகும். அதாவது,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial b^2} > \left(\frac{\partial^2 y}{\partial a \, \partial b}\right)^2$$

என்று அமையும் நிலையில்தான் இச்சார்பினது உச்சமானது காணப்படும். ∴ இலாபமும் உச்சமாகும். எனவே, காரணிகள் அதிக அளவில் (quantity) பயன்படுத்தப்படும் நிலையில், இலாப அளவு குறைவதெனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

y-ன் உச்ச நிலையினைக் கணக்கிட மற்றொரு செய்முறையினையும் பின்வருமாறு கருதுகிறோம் :

2-வது செய்முறை

முதலில் குறிப்பிடப்பட்ட முறையானது கையாள எளிதாக அமையும். இங்கு கருதப்படும் மற்றொரு செய்முறையில் (aliter). λ என்று குறிப்பிடப்படும் இலக்ராஞ்ச் பெருக்க எண்ணைப் (Lagrangean multiplier) பயன்படுத்துகின்றோம். அதன்படி பின்வரும் சார்பினை அமைக்கிறோம் :

$F(x, a, b) = xp_x - ap_a - bp_b + \lambda [x - f(a, b)]$ பிரச்சினையின் தீர்வானது, பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதன் மூலம் பெறப்படும்

$$F_x (x, a, b) \equiv p_x + \lambda = 0 ;$$

$$F_a (x, a, b) \equiv - p_a - \lambda f_a = 0 ;$$

$$F_b (x, a, b) \equiv -p_b - \lambda f_b = 0.$$

$$\& \quad x = f(a, b).$$

இவை அனைத்தும் முக்கிய நிபந்தனையில் அடங்குவன.

உதாரணம்

உற்பத்திச் சார்பு $x = f(a, b) = 10 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ என்றும், விலைகள் $p_x = 9$; $p_a = 1$; $p_b = 4$ என்றும் கொடுக்கப்படின், உச்ச அளவு இலாபத்தினை கணக்கிடுக.

உற்பத்திச் சார்பு $x = 10 - a^{-1} - b^{-1}$.

$p_x = 9; \; p_a = 1; \; p_b = 4.$

$\therefore$ நிகர இலாபமானது

$$y = 9x - 1 \cdot a - 4 \cdot b$$

$$= 9x - b - 4b$$

கொடுக்கப்பட்ட உற்பத்திச் சார்பின் அடிப்படையில் y சார்பானது உச்ச மிகுதிப் படுத்தப்படல் வேண்டும். உருவாக்கப்படும் சார்பானது,

$$F(x, a, b) = 9x - a - 4b + \lambda(x - 10 + a^{-1} + b^{-1})$$

இங்கு λ என்ற மாறிலி, இலக்ராஞ்ப் பெருக்கு எண்ணாகும். உச்ச இலாப அளவினை மதிப்பிடத் தேவைப்படும் நிபந்தனைகளை, பகுதி வகை வேறுபாட்டுக் கெழுக்கள் பூஜ்யத்துக்குச் சமம் என்றபடி பெறுகிறோம். அதாவது,

$$F_x(x, a, b) : 9 + \lambda = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$F_a(x, a, b) : -1 - \lambda a^{-2} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$F_b(x, a, b) : -4 - \lambda b^{-2} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(1)-லிருந்து $\lambda = -9$ எனப் பெறுகிறோம். (2), (3) இவற்றில் இம்மதிப்பினைப் பிரதியிட,

$$-1 + 9a^{-2} = 0; \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$-4 + 9b^{-2} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

(4), (5) ஆகியவற்றைத் தீர்க்க,

$a = 3 ; b = \frac{3}{2}$ என்ற மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

$x = f(a, b)$ என்ற உற்பத்திச் சார்பிலிருந்து, $x = 9$ எனப் பெறலாம்.

இறுதியில், உச்ச இலாப அளவானது $y = 72$ என பெறப் படும்.

மாற்றுமுறை (aliter)

இதே உதாரணத்தை, முதலில் கூறப்பட்ட செய்முறையின் படி கருதலாம்.

நிகர இலாபச் சார்பானது

$$y = p_x \cdot f(a, b) - ap_a - bp_b$$
$$= 90 - 9a^{-1} - 9b^{-1} - a - 4b.$$

a, b இவற்றின் அடிப்படையில், இச் சார்பின்] நிபந்தனையற்ற உச்ச மதிப்பினைத் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

சமன்பாடுகள் :

$$\frac{\partial y}{\partial a} : 9a^{-2} - 1 = 0 ;$$

$$\frac{\partial y}{\partial b} : 9b^{-2} - 4 = 0.$$

ஆகும். முன்பு கண்டதுபோல் இவை அமையும். எனவே, $a = 3$; $b = \frac{3}{2}$; $x = 9$ என்ற மதிப்புகள் பெறப்படுகின்றன.

மேலும் $\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} = -18a$;

$a = 3$ எனப் பிரதியிட, $\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} = -54 < 0.$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial b^2} = -18b ;$$

$b = \frac{3}{2}$ எனப் பிரதியிட, $\frac{\partial^2 y}{\partial b^2} = -27 < 0$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a \, \partial b} = 0.$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 y}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial b^2} > \left(\frac{\partial^2 y}{\partial a \, \partial b} \right)^2.$$

எனவே, பெறப்பட்ட a, b, x மதிப்புகளில், இலாபம் உச்சநிலை அடையும்.

$\therefore$ உச்ச இலாப அளவு $y = 72$.

உதாரணம் 2

உற்பத்திச் சார்பு

$$16x = 60 - 2(a-5)^2 - 4(b-4)^2$$

என்றும், விலைகள் $p_a = 8$; $p_b = 4$; $p_x = 16$ என்றும் கொடுக்கப்படின், உச்ச இலாபத்தின் அளவினை தீர்மானிக்கவும்.

இலாப அளவு

$$y = p_x \cdot f(a, b) - a p_a - b p_b.$$
$$= 16x - 8a - 4b.$$
$$= 60 - 2(a-5)^2 - 4(b-4)^2 - 8a - 4b.$$

முக்கிய நிபந்தனை :

$$\frac{\partial y}{\partial a} = 0 \text{ என்பதிலிருந்து}$$

$$-4(a-5)-8=0$$

அல்லது $4a - 12 = 0$ ... ... (1)

எனவும்,

$$\frac{\partial y}{\partial b} = 0 \text{ என்பதிலிருந்து}$$

$$-8(b-4)-4=0$$

அல்லது $8b - 28 = 0$ ... ... (2)

எனவும்,

இரு சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

(1), (2) இவற்றைத் தீர்க்க,

$a = 3$; $b = \frac{7}{2}$ என்ற மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன.

போதுமான நிபந்தனை :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} = -4 ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial b^2} = -8.$$

இவை இரண்டுமே < 0 எனக் காண்க.

மேலும், $\frac{\partial^2 z}{\partial a\, \partial b} = 0.$

$$\therefore \frac{\partial^2 y}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial b^2} > \left(\frac{\partial^2 y}{\partial a \partial b}\right)^2.$$

எனவே, இந்த மதிப்புகளில், இலாபமானது உச்சநிலை அடையும்.

உச்ச இலாப அளவு :

$$y = 60 - 2(-2)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 24 - 14$$

$$= \underline{13.}$$

உதாரணம் 3

உற்பத்திச் சார்பானது

$$x = 12 - \frac{1}{a} - \frac{4}{b}\text{ ; விலைகள் } p_x = 9;\ p_a = 2;\ p_b = 4.$$

இந்த நிலையில், உச்ச அளவு இலாபத்தினைக் கணக்கிடுக.

கொடுக்கப்பட்டவை :

$$y = 12 - \frac{2}{a} - \frac{4}{b};\ p_x = 9;\ p_a = 2;\ p_b : 4.$$

$\therefore$ நிகர இலாபமானது

$$y = 9x - 2a - 4b$$

$$= 108 - \frac{18}{a} - \frac{36}{b} - 2a - 4b.$$

முக்கிய நிபந்தனைப்படி,

$\frac{\partial y}{\partial a} = 0$ என்பதிலிருந்து

$\frac{18}{a^2} - 2 = 0$ எனவும்.

$\frac{\partial y}{\partial b} = 0$ என்பதிலிருந்து,

$\frac{36}{b^2} - 4 = 0$ எனவும்

பெறுகிறோம்.

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்க,

$a = 3;\ b = 3$ என்று கிடைக்கும்.

மேலும். $\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} = -\frac{36}{a^3}$;

$$\frac{\partial^2 y}{\partial b^2} = -\frac{72}{b^3}$$

$a = 3$; $b = 3$ என்பது இவற்றில் பிரதியிட,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} = -\frac{4}{3} < 0; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial b^2} = -\frac{8}{3} < 0.$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a \partial b} = 0 \text{ என்பதால்,}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial b^2} > \left(\frac{\partial^2 y}{\partial a \partial b}\right)^2$$

என்று அமையும்.

எனவே, (3, 3) என்ற புள்ளியில். நிகர இலாப அளவானது உச்ச நிலையினை அடைகின்றது.

$$x = 12 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = 10 \text{ ஆகும்}$$

∴ உச்ச அளவு இலாபமானது

$y = 90 - 6 - 12 = 72$ ஆக அமையும்

உதாரணம் 4 :

உற்பத்திச் சார்பானது

$x = 4ab - a^2 - 3b^2$ ஆகும்.

விலைகள் $p_a = 2$; $p_b = 4$; $p_x = 4$.

என்று கொடுக்கப்படின், உச்ச அளவு இலாபத்தினைத் தீர்மானிக்கவும்.

கொடுக்கப்பட்டவை :

$x = 4ab - a^2 - 3b^2$

$p_a = 2$; $p_b = 4$; $p_x = 4$.

∴ இலாப அளவானது

$$y = 4x - 2a - 4b$$
$$= 4(-a^2 + 4ab - 3b^2) - 2a - 4b.$$

முக்கிய நிபந்தனை :

$$\frac{\partial y}{\partial a} = 0 \Longrightarrow -8a + 16b - 2 = 0$$

$$\text{அல்லது } 8a - 16b + 2 = 0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial b} = 0 \Longrightarrow 16a - 24b + 4 = 0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$$

(1), (2) இவற்றைத் தீர்க்க,

$a = 1 \; ; \; b = \frac{7}{4}$ என்று பெறுகிறோம்.

மேலும்,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} = -8 \; ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial b^2} = -24.$$

∴ இரண்டும் < 0 ஆக அமைகின்றன.

ஆனால், $\frac{\partial^2 y}{\partial a \, \partial b} = 16$ என்பதன் மூலம்,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial b^2} < \left(\frac{\partial^2 y}{\partial a \, \partial b} \right)^2 \text{ என்று பெறுகிறோம்.}$$

அதாவது $192 < 256$.

எனவே, போதிய நிபந்தனை பொருந்துவதில்லை யாதலால், இலாப அளவானது (1) முழுமையான உச்ச மதிப்பினை அடைவதில்லை எனத் தீர்மானிக்கிறோம்.

வேறொரு விதத்தில், ஓரளவு உச்சமதிப்பு இலாபத்தினைக் கணக்கிடலாம்.

$a = 1 \; ; \; b = \frac{7}{4}$ என்று பிரதியிட, இலாப அளவானது.

$$y = 4\left(-\frac{49}{16} + 7 - 3\right)\left(\frac{7}{2} - 4\right)$$

$$= -\frac{15}{4}$$

அதாவது,

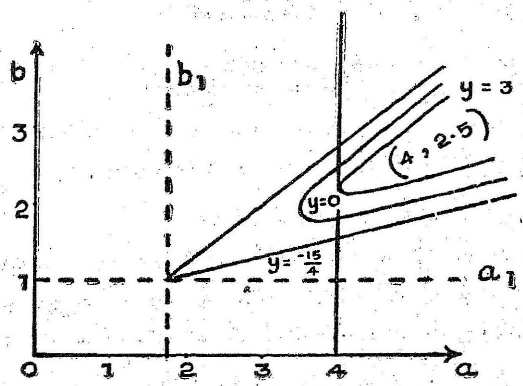
$$y=4\left[-\left(a-\frac{7}{4}\right)^2+4\left(a-\frac{7}{4}\right)(b-1)-3(b-1)^2\right]-\frac{15}{4}$$

ஆகும்.

$\left(1, \frac{7}{4}\right)$ என்ற புள்ளியினை ஆரம்பமாக (origin) கருதினல்.

$y = 4\left(-a_1^2 + 4a_1 b_1 - 3b_1^2\right) - \frac{15}{4}$ என்ருகும்.

a_1, b_1 இவற்றின் நேர்க்கணிய மதிப்புகட்கு, $y = 0$ என்ற வளைவானது அதிபர வளைவாக (hyperbola) அமையக் காணலாம்.



படம் 49.

$a < 4$ என்ற நிபந்தனையினை விதிக்கிறோம். அப்பொழுது உச்ச இயலானது $a = 4$ என்ற எல்லைக்கோட்டில் அதிபர வளைவை வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகட்கு நடுவாக அமைகிறது. $a = 4$ என்கையில், இலாபத்தினை y_1 எனக் குறிப்பிட்டு, b என்ற மாறியினைச் சார்ந்ததாகக் கருதலாம்.

அதாவது. $y_1 = 4(-16 + 16b - 3b^2) - 8 - 4b$
$= -72 + 60b - 12b^2.$

மேலும். $\frac{dy_1}{db} = 60 - 24b$:

$$\frac{d^2y_1}{db^2} = -24$$

∴ y_1 என்பது முழுமையான உச்ச மதிப்பினை $b = \frac{5}{2}$ என்ற மதிப்பில் அடைகின்றது.

எனவே, உச்ச இலாப அளவு,

$$y_1 = -72 + 150 - \left(12 \times \frac{25}{4}\right)$$

$$= 3$$

$$\therefore \; a = 4 ; \; b = \frac{5}{2} ; \; y_{\text{உச்சம்}} : 3$$

பயிற்சிகள்

1. இரு உற்பத்திக் காரணிகள் பயன்படுத்தப்படும் ஒரு பொருளின் உற்பத்திச் சார்பானது $8x = 50 - (a - 4)^2 - (b - 5)^2$ ஆகும். a, b, x ஆகியவற்றின் விலைகள் முறையே 2, 6, 8 எனில் உச்ச இலாபத்தினை மதிப்பிடுக.

2. ஒரு பொருளின் உற்பத்திச் சார்பு,

$16x = 60 - 4(a - 5)^2 - 2(b - 4)^2$ என்றும்,

$p_a = 8$; $p_b = 4$; $p_x = 16$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டால் உச்ச இலாப அளவினைத் தீர்மானிக்கவும்.

3. உற்பத்திச் சார்பு $5x = 6a + 24b - a^2 - 4b^2 - 25$ என்றும், இதற்கேற்ற விலைகள் $p_a = 8$; $p_b = 16$; $p_x = 20$ என்றும் தரப்பட்ட நிலையில், உச்ச இலாப அளவினைத் தீர்மானிக்கவும்

4. ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்திச் சார்பானது.

$$x = 5 - a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}$$

எனவும், விலைகள் $p_x = 2$; $p_a = 1$; $p_b = 8$ எனவும் தரப்பட்டால், காரணிகளின் தேவை அளவுகளைக் கணக்கிட்டு, உற்பத்தி அளவினை தீர்மானித்து, அந் நிறுவனத்தின் உச்சஇலாப அளவினையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

5. உற்பத்திச் சார்பு $x = 10 - a^{-2} - b^{-2}$ எனில். $p_x = 4$; $r_a = 27$; $r_b = 1$ என்ற விலைகளைக் கருதி, காரணிகளின் தேவை, உற்பத்தி அளவு மற்றும் உச்ச இலாப அளவு ஆகியவற்றைத் தீர்மானிக்கவும்.

6. உற்பத்திச் சார்பு $x = \dfrac{12ab - a - b}{ab}$;

விலைகள் $p_a = 1$; $p_b = 4$; $p_x = 9$. காரணிகளின் தேவை அளவுகள், அளிக்கப்படும் மொத்த அளவுகள், உச்ச இலாபம் ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.

7. ஒரு பொருளின் உற்பத்திச் சார்பினை $x = f(a, b)$ என்று கொள்க. இலாப அளவு உச்ச மிகுதிப்படுவதாகக் கொண்டு, சமநிலையில் இறுதிநிலை உற்பத்தித் திறன் அளவுகள் (marginal productivities),

$$f_a(a, b) = \frac{\partial x}{\partial a} = \frac{r_a}{p_x};$$

$$f_b(a, b) = \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{r_b}{p_x} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

மேலும் $\dfrac{f_a(a, b)}{f_b(a, b)} = \dfrac{r_a}{r_b}$ எனவும் நிரூபி.

அதாவது, இறுதிநிலை உற்பத்தித் திறன் அளவுகளின் விகிதமானது, சமநிலையில், காரணி விலைகளின் விகிதத்துக்குச் சமம். (இறுதிநிலை உற்பத்தித் திறன் கோட்பாடு).

(சென்னை, செப்டம்பர் '71)

(குறிப்பு: இலக்ராஞ்ச் பெருக்கு எண் λ வினை மதிப்புபிடுக).

8. ஒரு தொழில் நிறுவனத்தின் உற்பத்திச் சார்பு $x = 20 - a^{-1} - b^{-2}$ ஆகும். விலைகள் $p_x = 5$; $r_a = 20$; $p_b = 40$ எனத் தரப்படுகின்றன. இங்கு (a) இலாபம் உச்சமிகுதிப் படுத்தப்படுவதற்குரிய முக்கியமான மற்றும் போதுமான நிபந்தனைகளைக் கண்டுபிடிக்கவும். (b) காரணித் தேவைகளையும். உற்பத்தி அளவினையும், அந்நிறுவனத்தின் உச்ச இலாபத்தினையும் மதிப்பிடவும்.

9. உற்பத்திச் சார்பானது $x = 4 - \frac{2}{a^2 b}$ என்றும், விலைகள் $p_a = 5$; $p_b = 5$; $p_x = 10$ என்றும் கொடுக்கப்பட்ட நிலையில், உச்ச அளவு இலாபத்தினைக் கணக்கிடுக.

10. உற்பத்திச் சார்பு $x = 5ab - 2a^2 - 2b^2$ எனவும், விலைகள் $p_a = 4$; $p_b = 4$; $p_x = 6$ எனவும் அமையும் நிலையில், முழுமையான இலாப அளவு அமைவதில்லை எனவும் நிர்ணயிக்கப் படும் நிலையில் இலாபத்தின் மதிப்பானது $-\frac{8}{3}$ எனவும் காட்டுக. $a \leqslant 3$ என்ற நிபந்தனை விதிக்கப்படுகையில், உச்ச அளவு இலாபத்தை மதிப்பிட்டு அறியவும்.

சார்புடை உச்சநிலை மற்றும் மதிப்புகளைக் காணல் (Ralative maximum & minimum values)

$z = f(x, y)$ என்ற பொதுவானதொரு சார்பின் உச்ச அல்லது மீச்சிறு மதிப்பினைக் கண்டறிகையில். இத்தகைய பிரச்சினையானது மாறிகள் தனித்தனவாக (independent) இல்லாத நிலையிலும், ஒரு துணைச் சார்பு $\varphi(x, y) = 0$ மூலம் இணைக்கப்பட்டும் உள்ள நிலையில் ஏற்படுகிறது. கொடுக்கப்படும் நிபந்தனை 'துணைச் சார்' என்று கூறப்படும். இதிலிருந்து. ஒரு மாறியினை மற்றொன்றின் சார்பாகப் பெறலாம். இந்தத் துணைச் சார்புக் கேற்ப, கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் உச்ச மதிப்பு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பைக் காணல் வேண்டும்.

துணைச் சார்பு $\varphi(x, y) = 0$ என்பது y-யினை x-ஐச் சார்ந்த சார்பாக அளிப்பதெனக் கொண்டு, பிரதியிட,

$$z = f(x, y) = \psi(x) \text{ என்றாகும்.}$$

எனவே நமது பிரச்சினையானது, ஒற்றை மாறியினை சார்ந்த ஒரு சார்பின் உச்ச அல்லது மீச்சிறு மதிப்பை காணல் ஆகும். எளிய நிலையில், கொடுக்கப்பட்ட துணைச் சார்பு ஒற்றை மதிப்புடையதாய் அமைவதால் தீர்வு சுலபமாகிறது.

பொதுவான நிலையைக் கருதுவோம். கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $z = f(x, y)$, துணைச் சார்பு ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\frac{dz}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx} \text{ எனவும்,}$$

$$\varphi_x + \varphi_y \frac{dy}{dx} = 0 \text{ எனவும் பெறுகிறோம்.}$$

எனவே,

$$\frac{dz}{dx} = f_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_y} \cdot f_y$$

$\frac{dz}{dx} = 0$ என்பதிலிருந்து தீர்வு கிடைக்கும்.

எனவே, $z = f(x, y)$ என்ற சார்பு, $\varphi(x, y) = 0$ என்ற துணைச் சார்புடன் தொடர்புற்ற உச்ச மதிப்பு அல்லது சிறும மதிப்புகளை

$$\frac{f_x}{\varphi_x} = \frac{f_y}{\varphi_y}$$

என்ற நிலை அமையும் புள்ளிகளில் அடைகிறது. இது முக்கிய நிபந்தனையாகும். துணைச் சார்புடன், இச் சமன்பாட்டினையும் கருதி, x & y ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டறிகிறோம்.

மேலும், இரண்டாம் நிலை வகைவேறுபாட்டுகெழு

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(f_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_y} \cdot f_y\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(f_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_y} \cdot f_y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_y} \cdot f_y\right) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{1}{\varphi_y^3} \Big\{ \varphi_y (f_{xx} \cdot \varphi_y^2 - 2 f_{xy} \cdot \varphi_x \cdot \varphi_y + f_{yy} \cdot \varphi_x^2)$$

$$- f_y (\varphi_{xx} \cdot \varphi_y^2 - 2 \varphi_{xy} \cdot \varphi_x \varphi_y + \varphi_{yy} \cdot \phi_x^2) \Big\}$$

இந்த மதிப்பு நேர்க்கணியமாக அல்லது எதிர்க் கணியமாக அமையும் நிலையினைப் பொறுத்து, கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் உச்ச அல்லது சிறும மதிப்புகள் அமைந்திருக்கும். இது போதுமான நிபந்தனை.

f_x, f_y ஆகியவை z-ன் பகுதி வகை வேறுபாடுகள் ;

f_{xx}, f_{yy} ஆகியவை z-ன் நேரடி 2-ம் நிலைப் பகுதி வகை வேறுபாடுகள் ;

f_{xy} ஆனது z-ன் இரண்டாம் நிலை, குறுக்கீட்டு பகுதி வகை வேறுபாட்டுக்கெழு.

$\phi_x, \phi_y \longrightarrow$ துணைச் சார்பின் பகுதி வகை வேறுபாட்டுக் கெழுக்கள்.

மேற்கண்ட கணித முறையினை இந்த பயன்படுத்தி, உற்பத்தியாளரது முதற்பொருட் தேவை அளவுகளை நிர்ணயிக்கிறோம்.

உற்பத்திக் காரணிகளின் தேவை அளவுகளை நிர்ணயித்தல் (Demand for factors of production)

A, B காரணிகளைப் பயன்படுத்தி உற்பத்தி செய்யப்படும் X என்ற உற்பத்திப் பொருளின் மொத்த உற்பத்தி ஆக்க அளவானது $x = f(a, b)$ என்ற உற்பத்திச் சார்பின்படி குறிப்பிடப்படும். உற்பத்திக் காரணிகளின் விலைகளை r_a, r_b என்ற நிலையான மதிப்புகளாகவும், x என்ற உற்பத்தி அளவானது மிகக் குறைந்த செலவில் அடையப் பெறுதல் வேண்டும் எனவும் கொள்ளப்பட்ட எடுகோளின் அடிப்படையில் இச் சார்பினைக் கருதுக.

$x = f(a, b)$ என்ற துணைச் சார்பின் நிபந்தனைகள் உட்பட்டு, $\pi = a r_a + b \cdot r_b$ என்ற மொத்தச் செலவினை மீச்சிறு (minimum) அளவினதாக ஆக்கக்கூடிய (a, b) மதிப்புகளைக் கண்டறிய வேண்டும் என்பது பிரச்சினை. இதன் தீர்வு பின்வருமாறு:

a-யினைச் சார்பற்ற (independent) மாறியாகக் கருதுகையில், கொடுக்கப்பட்ட துணைச் சார்பு $x = f(a, b)$-லிருந்து,

$$\frac{db}{da} = -\frac{f_a}{f_b}$$ எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே

$$\frac{d\pi}{da} = p_a + p_b \cdot \frac{db}{da}$$

$$= p_a - \frac{f_a}{f_b} \cdot p_b.$$

மீச்சிறு செலவை அடைய, முக்கிய நிபந்தனை

$$\frac{d\pi}{da} = 0$$ அதாவது,

$$pa - \frac{f_a}{f_b} \cdot r_b = 0$$ ஆகும்.

இதிலிருந்து,

$$\frac{p_a}{f_b} = \frac{r_b}{f_b} \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

என்று பெறுகிறோம்.

இந் நிபந்தனையாவது, காரணிகளின் இறுதிநிலை உற்பத்தி அளவுகள் அவற்றின் கொடுக்கப்பட்ட விலைகட்கு விகித சமமாக அமையும் நிலைக்கு ஏற்ற காரணி அளவுகளை உபயோகிக்க வேண்டும் என்பதாகும். (அதாவது $f_a \propto p_a$; $f_b \propto p_b$)

இந்த மீச்சிறு செலவு அமைவதற்குப் போதுமான நிபந்தனை :

$\frac{d^2\pi}{d_a^2} > 0$ என்பது.

$$\frac{d^2\pi}{d_a^2} = \frac{d}{d_a}\cdot\left(\frac{d\pi}{d_a}\right) = p_b\cdot\frac{d^2 b}{d_a^2}$$

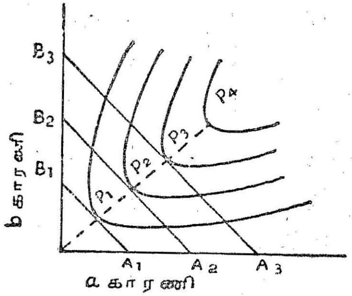
எனவே, $\frac{d^2 b}{d_a^2} > 0$ எனில், மேற்கண்ட நிலையானது மீச்சிறு விலைக்கு ஏற்ற தோன்றாய் அமையும். கருதப்பட்ட புள்ளியில் அமைந்த சமஆக்க அளவு வளைவானது ஆரம்பப் புள்ளிக்கு குவிவாக அமைந்திருக்கும். (canvex to origin) என்பதை இது குறிப்பிடுகிறது. எனவே, சம ஆக்க வளைவுகள் ஆரம்பப் புள்ளிக்குக் குவிவாக அமைந்திருக்கும் புள்ளிகளில் எல்லாம், சமநிலை (equilibrium) மாறுத தன்மையுடையதாய் இருக்கும் என அறிகிறோம்.

மேற்கண்ட, முக்கிய நிபந்தனை (1), கொடுக்கப்பட்ட துணைச் சார்பு $x = f(a, b)$ ஆகியவற்றிலிருந்து, காரணிகளின் தேவை அளவுகள் (a, b)யினை. கொடுக்கப்பட்ட p_a, p_b, x ஆகிய மதிப்புகளின் மூலம் நிர்ணயிக்கப் படுகின்றன. இதேபோல், மீச்சிறு செலவு மதிப்பும் (minimum cost) கண்டறியப் படுகின்றது. கொடுக்கப்பட்ட உற்பத்தி அளவு x-ன் மதிப்பு மாறுகையில் காரணிகளின் விலைகள் மாறுமல் இருக்கும் நிலையில், காரணிகளின் தேவை அளவுகள் மாறுபடும். உற்பத்திச் செலவும் இயல்பான மொத்தச் செலவுச் சார்பினைத் தரக் கூடிய அளவில் மாறுபடும்.

இதனை எடுத்துரைக்கும் விளக்கப் படமாவது :

இந்தப் படத்தில், $\pi = ap_a + bp_b$ எனும் செலவுச் சார்பின் வளைவானது, O_{ab} என்ற சமதளப் பரப்பில் இணைநேர்கோடுகளாக அமைந்திருக்கக் காணலாம். π_1 என்ற நிலையான (குறிப்பிட்ட) உற்பத்திச் செலவினைக் குறிக்கும் வளைவானது, $-\frac{p_a}{p_b}$ என்ற சாய்வினைக் கொண்ட நேர் கோடாகவும், அச்சுக்களை $\frac{\pi_1}{p_a}, \frac{\pi_1}{p_b}$

(O-விலிருந்து) தூரங்களில் வெட்டும் தன்மை உடையதாகவும் இருக்கும். x என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட உற்பத்தி அளவினைப் பெற வேண்டுமெனில், காரணிகளின் (a, b) என்ற எல்லாத் தொகுப்புக்களும் அதற்கேற்ற சம ஆக்க அளவு வளைவில் அமைந்திருக்கக் காணலாம். இதில், நமக்குத் தேவையானது, மிகச்சிறு அளவினதான, செலவினை உடைய காரணித் தொகுப்பேயாகும். அதாவது, ஆரம்பப்புள்ளி O-விற்கு மிகவும் அண்மையில் உள்ள 'செலவுக் கோட்டி'ல் அமையும் புள்ளிகளாகும். இத்தொகுதி அளவுகள், சம ஆக்க அளவு வளைவானது ஒரு செலவுக் கோட்டினைத் தொட்டுச் செல்லும் p என்ற புள்ளியின் மூலம் பெறப்படுகின்றன.



படம் 50.

சம ஆக்க அளவு வளைவானது இயல் நிலையில் (கீழ்நோக்கிச் சரிந்தும், 'O'-விற்குக் குவிவாகவும்) அமைந்திருக்கும் நிலையில், p என்ற புள்ளியானது ஒன்றே ஒன்றாக (unique) அமைந்திருக்கும். இப்புள்ளியானது மிகக் குறைந்த (மிகச்சிறு) அளவு உற்பத்திச் செலவினை ஒட்டியதாகவும் அமையும். p என்ற இப்புள்ளியில், சம ஆக்க அளவு வளைவின் தொடுகோட்டுச் சாய்வானது $\left(-\frac{f_a}{f_b}\right)$, செலவுக் கோட்டின் சாய்வுக்கு $\left(-\frac{P_a}{P_b}\right)$, சமமாக அமையும். அதாவது, $\frac{f_a}{f_b} = \frac{P_a}{P_b}$ ஆகும். இது மிகவும் முக்கியமான நிபந்தனையாக ஏற்கெனவே கண்டறியப் பட்டதாகும்.

x-ன் மதிப்பு தொடர்ந்து மாற்றப்படுகையில், வெவ்வேறு சம ஆக்க அளவு வளைவுகளைத் தொடர்ச்சியாகப் பெறுகிறோம். அதே போல, P_1, P_2 ... என்ற தொடர்புப் புள்ளிகளும் கிடைக்கின்றன. இப்புள்ளிகளில், சம ஆக்க அளவு வளைவுகள் A_1B_1, A_2B_2 ... என்றும் செலவுக் கோடுகளை முறையே தொட்டுச் செல்லுகின்றன. இந்நிலையானது மேற்கண்ட விளக்கப்படத்தில் அமைந்திருக்கக் காண்கிறோம்.

x-ன் மதிப்பானது படிப்படியாய் உயர்ந்து (x_1, x_2 ... என்று) செல்கிறது. x-ஆனது தொடர்ந்து மாறுபடுகையில், பல்வேறு புவளைகள், O_{ab} என்ற சமதளப் பரப்பில், 'ஒரு வளைவினை'

உருவாக்கக் காணலாம். இவ்வளவினில் அமைந்துள்ள புள்ளி களின் ஆயத் தொலைகள் (coordinates) மாறுவதானது, உற்பத்தி அளவு (x) மாறுபடுகையில், காரணிகளின் தேவைகளின் மாறு பாட்டை விளக்குகிறது. மேலும், தொடப்பட்ட செலவுக் கோடு கட்குத் தக்க, மாறுபடும் செலவானது மாறுபாட்டு உற்பத்தி x அளவைச் சார்ந்த மொத்தச் செலவுச் சார்பினை வரையறுப்ப தாகும்.

உற்பத்திச் சார்பானது, நேர் கோட்டு அமைப்பிலும், ஒரு படித்தானதாகவும். (நிலையான விளைவுகளுடன்) அமைந்திருக்கை யில், பின்வரும் நிலை அமையக் காணலாம் :

ஆயிலரின் விதிப்படி,

$$a f_a + b f_b = x \text{ என்று பெறப்படும்.}$$

எனவே

$$\frac{\pi}{x} = \frac{a p_a + b p_b}{x}$$

$$= \lambda \cdot \frac{a f_a + b f_b}{x}$$

$$= \lambda$$

இங்கு λ என்று $\frac{p_a}{f_a}$, $\frac{p_b}{f_b}$ என்ற விகிதங்களின் பொதுவான மதிப்பைக் குறிக்கும்.

மேலும்,

$$\frac{d\pi}{dx} = p_a \cdot \frac{da}{dx} + p_b \cdot \frac{db}{dx}$$

$$= \lambda \left[f_a \frac{da}{dx} + f_b \cdot \frac{db}{dx} \right]$$

$$= \lambda$$

$$\left[\because \; f_a \frac{da}{dx} + f_b \cdot \frac{db}{dx} = 1; \quad x = f(a, b) \text{ என்பதால்.} \right]$$

இங்கு உற்பத்தி அளவு x ஆனது மாறுபட்டும், p_a, p_b ஆகியவை நிலையான அளவிலும் உள்ள, மாறுபடும் தன்மையுள்ள சமநிலை அளவினைக் கருதுகிறோம். எனவே, எல்லா உற்பத்தி

அளவுகளிலும், சராசரி மற்றும் இறுதிநிலைச் செலவுகள் சமமாக இருக்கின்றன. உற்பத்தி அளவு எத்தகையாய் இருப்பினும், சராசரிச் செலவானது நிலையானதாக இருத்தல் வேண்டும். சம ஆக்க வளைவுகள் மேற் குறிப்பிட்ட வடிவில் அமைந்திருக்கக் காணலாம். P என்ற புள்ளியின் நியமப் பாதையானது, நேர் கோட்டு உருவில் அமையும். காரணி அளவுகள் ஒரே விகிதத்தில் உபயோகிக்கப்படுவதையும் குறிப்பிடலாம். அவற்றின் அளவு களும், மொத்தச் செலவும், உற்பத்தி அதிகரிப்புக் கேற்ப, ஒரே விகிதத்தில் அதிகரிப்பதைக் காணலாம். சம ஆக்க அளவு வளைவுகள் ஒன்றுக் கொன்று ஆரை வீச்சுக்களாய் (radial projections) அமைவதாகக் கூறப்படும்.

X என்ற பொருளானது, நிலையான உற்பத்தி விளைவு விகித விதிப்படி (law of constant returns to scale) உற்பத்தி செய்யப் பட்டு, நிறைவுப் போட்டியில் அமைந்த அங்காடியில், நிலையான சராசரிச் செலவுக்கு சமமான விலையான p என்ற விலைக்கு விற்ப தாகக் கொள்வோம். அப்பொழுது, நிபந்தனையானது :

$$\frac{p_a}{f_a} = \frac{p_b}{f_b} = \frac{\pi}{x} = p. \text{ (மாறிலி).}$$

எனவே $p_a = p \cdot f_c$; $p_b = p \cdot f_b$ என்று பெறுகிறோம்.

இந்த விதியானது "இறுதிநிலை உற்பத்தி திறன்" விதி என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. அதாவது, ஒரு காரணியின் விலை யானது, பொருளின் சராசரி விலையில் (p) மதிப்பிடப்படும் அக் காரணியின் இறுதிநிலை உற்பத்தித் திறன் மதிப்புக்குச் சமமாய் இருக்கும்.

எனவே A என்ற காரணிக்கு,

A-ன் விலை = (பொருளின் விலை) × (A-ன் இறுதிநிலை உற்பத்தித்திறன்).

அதாவது $p_a = p \cdot f_a$ ஆகும்.

இதேபோல் $p_b = p \cdot f_b$ என அமைகிறது.

மேலும், விற்கப்படும் அப் பொருளின் தேவை விதியானது $x = \varphi(p)$ என்றும், தேவை நெகிழ்ச்சிக்கெழு

$$\eta = -\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$$

என்றும் கொடுக்கப்பட்ட நிலையில், காரணித் தேவைகளையும் (a, b), பொருளின் விற்பனை விலையையும் (p), கொடுக்கப்பட்ட காரணி விலைகள் $(p_a \& p_b)$ மூலமாக, பின்வரும் சமன்பாடுகள் மூலம் கண்டறிலாம் :

$$(1)\quad f(a, b) = \varphi(p);$$

(உற்பத்திச் சார்பிலிருந்து)

$$(2)\quad p_a = p \cdot f_a;$$

$$(3)\quad p_b = p \cdot f_b;$$

உற்பத்தி அளவு $x = f(a, b) = \varphi(p)$ என்பதும், மொத்தச் செலவு $\pi = p \cdot x = ap_a + b \cdot p_b$ என்பதும் இதன்படி மதிப்பிடப்படலாம்.

∴ நிலையான உற்பத்தி விளைவு விகிதத்தின் அடிப்படையில், முழுமையான நிறைவுப் போட்டிச் சமநிலை தீர்மானிக்கப்படும்.

குறிப்பிட்ட நிலை (special case) :

ஒரு காரணி விலை (p_a) மாறுபட்டும், மற்றொன்று (p_b) நிலையாகவும் இருக்கும் நிலையில், காரணிகளின் தேவை அளவுகள் $(p_a, p_b$ மூலம் தரப்படுபவை) மாறும் விதத்தைப் பின்வருமாறு கருதலாம் :

$x = f(a, b)$ என்ற நேர்கோட்டு, ஓரினச் சார்புக்கு,

$$f_{aa} = -\frac{b}{a} f_{ab};$$

$$f_{bb} = -\frac{a}{b} \cdot f_{ab}$$

என்று அறிவோம். (4-வது இயல்பின்படி).

மேலும், காரணிகளின் இடையே, பதிலீட்டு நெகிழ்ச்சி கெழுவானது,

$$\sigma = \frac{f_a f_b}{x \cdot f_{ab}}$$

என்பதாகும்.

அதாவது, $f_{ab} = \frac{f_a f_b}{x \cdot \sigma}$ என்று அமையும்.

இதனைப் பிரதியிட,

$$f_{aa} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{f_a \cdot f_b}{\lambda\sigma} ; \ f_{bb} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{f_a f_b}{\lambda\sigma} ;$$

$$f_{ab} = \frac{f_a f_b}{\lambda\sigma} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

என்று பெறுகிறோம். எனவே, முன்பு கருதப்பட்ட மூன்று நிபந்தனைகளுடன், மேலும் ஒரு நிபந்தனை கூடுகிறது.

சமன்பாடுகள் (1), (2), (3) ஆகியவை p_a, p_b-ன் எந்த மதிப்பிலும் பொருந்துகின்றன என்பனவாகும்.

$\frac{Ea}{Ep_a} = \frac{r_a}{a} \cdot \frac{\partial a}{\partial p_a}$ என்றும்,

$\frac{Eb}{Ep_a} = \frac{r_a}{b} \cdot \frac{\partial b}{\partial p_a}$ என்றும், காரணிகளின் (p_a-யினைச் சார்ந்த) தேவை நெகிழ்ச்சிக் கெழுக்களைக் குறிப்பிடுக. இக்காரணிகளின் வருவாய் பகிர்வு விகிதங்கள்

$$\kappa_a = \frac{a \cdot r_a}{\lambda p} ; \ \kappa_b = \frac{b r_b}{\lambda p}$$

என்பவையாகும்.

$$\therefore \kappa_a + \kappa_b = 1 \text{ ஆகிறது.}$$

எனவே,

$$\frac{Ea}{Ep_a} = -(\kappa_b \sigma + \kappa_a \cdot \eta) ; \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

$$\frac{Eb}{Ep_a} = \kappa_a (\sigma - \eta) \text{ என்று பெறுகிறோம்.} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

இவற்றின் விளக்கமாவது :

A காரணி விலை p_a அதிகரிக்கையில், இருகாரணித் தேவை அளவுகளும் இரு வகைகளில் பாதிக்கப்படுகின்றன.

முதலில், உற்பத்திச் செலவானது அதிகரிக்கிறது; பொருளானது அதிக விலையில் விற்கிறது ; மேலும், η நேர்க்கணியமான (+) குறையும் தேவை விதிப்படி, குறைந்த அளவில் பொருளானது வாங்கப்படுகிறது. இந்நிலையில், இரு காரணிகட்கும், தேவை விகிதத்தில் குறைவு ஏற்படக் காணலாம். இதனை, எதிர்க்கணியக் கூருன ($-\kappa_a \cdot \eta$) என்பதன் மூலம் அறியலாம் [(5), (6) இவற்றில்].

இரண்டாம் நிலையில், B காரணியானது, A-யுடன் ஒப்பிடுகையில், மிக மலிவானதாய் உள்ளது. இந்நிலையில், உற்பத்தியில் இயன்றவரை A என்ற காரணிக்கு B-யினை இம்மூன்று சமன்பாடுகளையும் p_a என்ற மாறியினைச் சார்ந்து, பகுதிவகைப் படுத்துவதன் மூலமாக, பின்வரும் புதிய சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$f_a \cdot \frac{\partial a}{\partial p_a} + f_b \cdot \frac{\partial b}{\partial p_a} = \varphi'(p) \cdot \frac{\partial x}{\partial p_a} = -\eta \cdot \frac{x}{p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_a};$$

$$1 = f_a \cdot \frac{\partial p}{\partial p_a} + p\left(f_{aa} \cdot \frac{\partial a}{\partial p_a} + f_{ab} \cdot \frac{\partial b}{\partial p_a}\right);$$

$$\left[\therefore\ \eta = -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = -\frac{p}{x} \cdot \varphi'(p)\right]$$

$$0 = f_b \cdot \frac{\partial p}{\partial p_a} + p\left(f_{ab} \cdot \frac{\partial a}{\partial p_a} + f_{bb} \cdot \frac{\partial b}{\partial p_a}\right).$$

(2), (3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$x\eta \cdot \frac{\partial p}{\partial p_a} + p_a \cdot \frac{\partial a}{\partial p_a} + p_b \cdot \frac{\partial b}{\partial p_a} = 0;$$

$$x\sigma \cdot \frac{\partial p}{\partial p_a} - \frac{b}{a} \cdot p_b \cdot \frac{\partial a}{\partial p_a} + p_b \cdot \frac{\partial b}{\partial p_a} = \frac{xp}{p_a} \cdot \sigma;$$

$$x\sigma \cdot \frac{\partial p}{\partial p_a} + p_a \cdot \frac{\partial a}{\partial p_a} - \frac{a}{b} \cdot p_a \cdot \frac{\partial b}{\partial p_a} = 0.$$

$\therefore$ மூன்று தெரியாத மதிப்புகளான $\frac{\partial p}{\partial p_a}$, $\frac{\partial a}{\partial p_a}$, $\frac{\partial b}{\partial p_a}$ ஆகியவற்றினைச் சார்ந்த மூன்று சமன்பாடுகள் அமைகின்றன. இவற்றைத் தீர்ப்பதன் மூலமாக, இப்பகுதி வகை வேடுபாட்டுக் கெழுக்களின் மதிப்புகள் பெறப்படுகின்றன. முதலில் $\frac{\partial p}{\partial p_a}$ என்பதைப் போக்கி, $\frac{\partial a}{\partial p_a}$ & $\frac{\partial b}{\partial p_a}$ என்பவற்றில் இரு சமன்பாடுகளைப் பெற்று, அவற்றைத் தீர்க்க, மதிப்புகள் கிடைக்கும். கிடைத்த மதிப்புகளாவன :

$$\frac{\partial a}{\partial p_a} = -\frac{a}{p_a}\left(\frac{ap_a}{x \cdot p} \cdot \eta + \frac{bp_b}{x \cdot p} \cdot \sigma\right)$$

$$\& \quad \frac{\partial b}{\partial p_a} = -\frac{ab}{x \cdot p}(\eta - \sigma)$$

பதிலிடுவதானது ஆதாயமுடையதாய் அமையும். எனவே, A-ன் தேவை அளவைக் குறைப்பதன் மூலம், B காரணியின் தேவை அளவு அதிகரிக்கக் காணலாம். இது, (6) என்ற நெகிழ்ச்சிக் கெழுவில் உள்ள $-\kappa_b\sigma$ என்ற நேர்க்கணியக் கூறின் மூலமும், (5) என்ற நெகிழ்ச்சிக் கெழுவில் உள்ள $-\kappa_b\sigma$ என்ற எதிர்க் கணியக்கூறு மூலமாகவும் காட்டப்படுகிறது. தேவையில் ஏற்படும் மொத்த விளைவானது, கூட்டு மதிப்பின் மூலம் விளக்கப்படும். எந்நிலையிலும் A-ன் தேவை குறைகின்றது; ஆனால், B-ன் தேவையளவானது, பொருளின் தேவைமூலம் ஏற்படும் விளைவினை விடப் பதிலீட்டு விளைவானது வலுவாகவோ அல்லது வலிமையிற் குறைந்தோ அமைந்திருக்கும் நிலையினுக்கு ஏற்றபடி, அதிக மாகவோ, குறையவோ செய்கிறது.

17. நுகர்வோர், உற்பத்தியாளர் உபரி மதிப்பீடுகள்

(Consumer's Surplus and Producer's surplus)

நுகர்வோர் உபரி என்ற கருத்தினை நுகர்ச்சியியலில் அறிமுகப் படுத்தியவர் ஆல்ஃப்ரட் மார்ஷல் (Alfred Marshall) ஆவார். அன்றாட வாழ்வில், பல பொருட்களைப் பயன்படுத்தும் நாம் அனைவருமே நன்கறிந்த ஒரு உண்மையினை, ஒரு குறிப்பிட்ட உருவில் வரையறுத்து ஒரு கோட்பாடாக அவர் அளித்தார். சாதாரணமாக, பொருட்களை நாம் அங்காடியில் வாங்குகையில், அப் பொருட்களுக்கு அமையும் உண்மை விலையினை (actual price) விட அதிகமானதொரு விலையினைத் தருவதற்கு முன் வருகிறோம். நுகர்வோர் உபரி என்ற இக்கருத்தானது, மிகவும் இன்றியமையாத தாகவும், மலிவானதாகவும் அமைந்த பொருட்களுக்குத்தான் வரையறுக்கப்படுகிறது. உதாரணமாக, அஞ்சலட்டை, தீப் பெட்டி, உப்பு, காகிதம் போன்ற எளிய பொருட்களைக் கொள்ளலாம். இத்தகைய பொருட்களைப் பயன்படுத்தாமல் போவதை விட, அதிக விலையினைக் கொடுத்தேனும் அவற்றை வாங்குவதை முக்கியமாக கருதுகிறோம். இவற்றின் மூலம் பெறப் படும் அதிகப்படி (உபரி) திருப்தி அளவானது நுகர்வோர் உபரி என்று கூறப்படுகிறது.

மார்ஷல் வரையறுத்த விதமாவது : "நுகர்வோனானவன் ஒரு பொருளை வாங்காமல் போவதை விட, அதிக விலை கொடுத் தேனும் அப்பொருளை வாங்குவதற்கு முன்வரும் நிலையில், அப் பொருளுக்கு அவன் கொடுக்கும் உண்மையான விலைக்கு மேல் அதிகப்படியாக கொடுக்க முன்வரும் விலையானது, உபரியான நுகர்வுப் பயனின் பொருளாதார அளவு எனக் கொள்ளப்படும் நிலையில் அதனை நுகர்வோர் உபரி என்று கூறலாம்".

சுருங்கக் கூறின், நுகர்வோர் உபரியானது, தாம் கொடுக்க முன்வரும் விலைக்கும், உண்மையில் கொடுக்கும் விலைக்கும் உள்ள வேறுபாடாகும். இதனைப் பின்வரும் உதாரணப் பட்டியலின் உதவியுடன் நன்கு விளக்கிக் கூறலாம் :

குறைந்து செல் நுகர்வுப் பயன் விதியின் அடிப்படையில், நுகர்வோர் உபரியானது பின் வருமாறு பெறப்படும் :

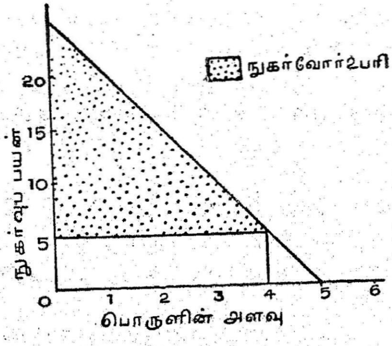
பொருளின் அளவு	மொத்தப் பயன்	இறுதிநிலைப் பயன்
1	20	20
2	35	15
3	45	10
4	51	6
5	51	0
6	45	— 6

இப் பட்டியலில் கருதப்பட்ட மதிப்புக்கள், நம் கருத்தினை வலியுறுத்தும் பொருட்டு கருதப்பட்ட கற்பனையான மதிப்புக்களே ஆகும். இதே தன்மையில் அமைந்த வேறு மதிப்புக்களை கருதும் பொழுதும், நமது கருத்து மாறுவதில்லை எனக் குறிப்பிடலாம். பொருளின் ஒவ்வொரு அளவு பயன்படுத்தப்படுகையிலும், அதிகப் படி (இறுதிநிலை) பயனனது படிப்படியாகக் குறைந்து செல்லும் நிலை அமைவது மிக முக்கியமானதாகும்.

மேற்கண்ட பட்டியலின்படி, பொருளின் அங்காடி விலையானது 6 பைசா என்பதாக நிர்ணயிக்கப்படுவதாகக் கொள்கிறோம். அதாவது, இறுதிநிலைப் பயனும் பொருளின் விலையும் சமமாக இருக்கும் பொருளின் அளவினை நுகர்வோனனவன் வாங்குகிறான்.

நுகர்வுப்பயனின் மதிப்பானது, ஒரு அலகு ஒரு பைசா என்ற வீதத்தில் கொள்ளப்படுகிறது. இந்த அடிப்படையில், 4 அலகுகள் வாங்கப் படுகையில், மொத்தம் 24 பைசாக்கள் செலவாகின்றன. இந்த அளவினுக்கு ஏற்ற மொத்த நுகர்வுப் பயனானது 51 பைசாக்களாக மதிப்பிடப்படுகிறது. அதாவது அப்பொருளினை வாங்காமல் போவதைவிட, நுகர்வோனானவன் 51 பைசாக்கள் என்ற விலையினைச் செலுத்த முன்வருகிறான். ஆனால், உண்மையில் கொடுக்கப்படும் விலை அளவு 24 பைசாக்கள் மட்டுமே ஆகும். எனவே, இந்நிலையில் அவனுக்கு 51 — 24 = 27 பைசாக்கள் மதிப்புள்ள நுகர்வோர் உபரியானது கிடைக்கின்றது. பொருளின் விலை 10 பைசாவாக உயரும்பொழுது, 3 உருப்படிகளை 30 பைசாக்கள் கொடுத்து வாங்கும் நிலையில், அவனுக்குக் கிடைக்கும் நுகர்வோர் உபரியானது 45 — 30 = 15 பைசாக்கள் மதிப்புள்ளதாக அமையும். இதே போல, மற்ற அளவு நிலைகளிலும் கணக்கிட்டு அறியலாம்.

விளக்கப் படத்தின் மூலம், இக் கருத்தினைப் பின்வருமாறு எடுத்துக் கூறலாம். X அச்சில் பொருளின் வாங்கப்படும் அளவு களையும், Y அச்சில் பணத்தின் மூலம் மதிப்பிடப்பெறும் நுகர்வுப் பயனையும் கருதுக.



படம் 51.

பொருளின் அங்காடி மதிப்பானது PM (விலை) என்றிருக்கும் நிலையில், நுகர்வோர் வாங்கும் அளவானது OM என அமைவதைக் காண்கிறோம். ஏனெனில், இந்த அளவினில் இறுதிநிலைப் பயனும் பொருளின் விலையும் சமமாக உள்ளன. இதற்கு முன்பாக உள்ள வாங்கப்படும் அளவுகளில், இறுதிநிலைப் பயனானது PM-ஐவிட அதிகமாக உள்ளது. M' என்னும் அளவில், இறுதி

நிலைப் பயன் $P'M'$ என்று அமையும். ஆனால் அப் பொருளுக்கு அவன் செலுத்தும் உண்மையான விலை PM அளவேதான் இருக்கும். மற்ற எந்த அளவினுக்கும் இதே விலைதான் கொடுக்கப் படுகின்றது. எனவே, OM' அளவு வாங்கப்படுகையில் அவனுக்கு கிடைக்கும் உபரிப் பயனானது $P'P''$ மதிப்புள்ளதெனக் காண்கிறோம். இந்த குறிப்பிட்ட அளவில் கிடைக்கும் நுகர்வோர் உபரி இவ்வாறு காட்டப்படும். இதேபோன்று, மற்ற எந்த அளவு வாங்கப்படும்பொழுதும், இதேபோன்ற ஒரு உபரிப் பயன் கிடைக்கக் காண்கிறோம்.

∴ OM என்ற அளவில், பொருளானது வாங்கப்படும் பொழுது கிடைக்கும் மொத்த நுகர்வோர் உபரி மதிப்பானது — PM என்ற விலையில்—UAF என்ற தீட்டப்பட்ட பகுதியின் மூலம் (படம்) காட்டப்படும. பொருளின் விலையானது $P'M'$ என உயரும் நிலையில், நுகர்வோர் உபரி மதிப்பு $UA'P'$ என்ற பரப் பாகச் சுருங்கி அமைவதையும் காணலாம். ∴ பொருளின் விலை யானது, அங்காடியில் படிப்படியாக அதிகரிக்கையில், நுகர்வோர் உபரியும் தொடர்ந்து குறைவதைக் காண்கிறோம். கணித இயலின் அடிப்படையில் இதனை மதிப்பிடுகையில், பல்வேறு மதிப்புகளை ஒப்பிட்டு அறிய இயலும். குறைந்த விலையில் நிறைந்த பயனை அடைய எண்ணுவது, நுகர்வோர் இயல்பு என்ற கருத்தும் இதன் மூலம் வெளிப்படுவது குறிப்பிடத்தக்கதாகும். வாங்குபவர்களிற் சிலர், இறுதிநிலைத் தன்மை உடையவராய் அமைகின்றனர் என்ற உண்மையின் அடிப்படையில், இக் கருத்தானது விளக்கப்படும் எல்லா அளவு நிலைகளிலும் (unit) விலையானது ஒன்ருகவே இருத்தல் அவசியம்.

நுகர்வோர் உபரியினை மிகவும் துல்லியமாகக் கணக்கிடுவ தானது நடைமுறையில் எளிதாக அமைவதில்லை. அதில் ஏற்படும் பல்வேறு சிரமங்களைப் பின்வருமாறு வகைப்படுத்திக் கூறலாம்.

தேவைப் பட்டியலின் முழு அளவும் கொடுக்கப்படுவதில்லை. தேவை விலைகளின் முழு விவரமும் தெரிவதில்லை. ஒவ்வொரு அலகு பயன்படுத்துகையிலும், நாம் செலுத்தக் கூடிய விலை தெரிய வில்லை. ஆதலால், நுகர்வோர் உபரி மதிப்பீடு கடினமாய் அமை கிறது.

மிகவும் அடிப்படைத் தேவைப் (necessaries) பொருட்களின் நிலை, இந்த உபரி மதிப்பீடானது வரையறுத்துக் கணக்கிட இயலாதபடி உள்ளது. அதிகப்படியான திருப்தி என்று குறிப்

பிட்டுக் கூறத்தக்க அளவிற்கு இந் நிலையில் ஏதும் அமைவதில்லை. மேலும், மனிதனின் அடிப்படைத் தேவைகள் பூர்த்தி செய்யப் பட்ட பின்பே, அதிகப்படியான பயன் அவனுக்குக் கிடைப்பதைக் காணலாம்.

நுகர்வோரது சூழ்நிலைக்குத் தக்கபடி அவர்தம் உபரிப்பயன் அளவு மாறுபடும். மிகுந்த பண வசதி படைத்தவர்களால் பொருளுக்கு எந்த அளவு உயர்ந்த விலையினையும் தர இயலுகிறது. எனவே இதில் ஏற்படும் ஏற்றத் தாழ்வுகளால், உபரி மதிப்பைக் காண்பது கடினமாய் அமையும்.

நுகர்வோரது விருப்பம், உணர்வு, அனுமானம் இவற்றிற்கேற்ப உபரிப் பயனின் அளவும் மாறுபடுகிறது. சில பொருட்களை நாம் மிகவும் விருப்பத்தோடு வாங்குகையில், அவற்றிற்கு எந்த (அதிக) விலையேனும் அளிக்க முன்வருகிறோம்.

பணத்தின் இறுதிநிலைப் பயன் ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் மாறிக் கொண்டே வருவது மற்றொரு காரணமாகும். அதிகமாகச் செலவு செய்கையில், நம்மிடமிருக்கும் பணத்தின் பயன் அதிகரித்து வரும் நிலையைக் காணலாம். ஆனால் இத்தகைய மாற்றத்தை, நுகர்வோர் உபரி மதிப்பீட்டில் நாம் கருதுவதில்லை.

ஒரு பொருளை மற்றொன்றின்மூலம் பதிலீடு செய்வது கடின மாக அமைந்திருக்கும் நிலையிலும் நுகர்வோர் உபரியினை மதிப் பிடுவது எளிதாவதில்லை.

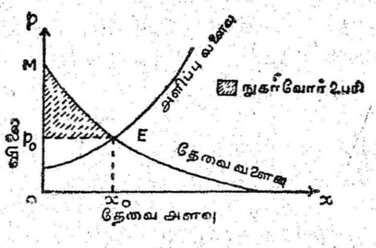
சில பொருட்கள் — வைர ஆபரணங்கள் போன்றவை — வீண் ஆடம்பரத்துக்காக வாங்கப்படுகின்றன. இவற்றின் விலை குறையும்போது தேவை அதிகரிப்பதில்லை. எனவே, இத்தகைய பொருட்களுக்கு விலை குறைகையில், நுகர்வோர் உபரி மதிப்பு அதிகரிப்பதில்லை எனக் காண்கிறோம்.

எனவே, இந்த உபரியினை மிக துல்லியமாகக் கணக்கிட்டு அறிவது இயலுவதில்லை என்பது புலப்படுகின்றது.

பிற்காலத்தில், இந்தக் கருத்து நடைமுறைக்கு ஏற்றதல்ல என்றும், கற்பனையான ஒன்று எனவும் வாதிடப்பட்டது. ஆனால், கணக்கிட்டுத் துல்லியமாக அறிவது இயலாது (இக் குறையும் பின்னால் நிவர்த்தி செய்யப்படுகின்றது) என்ற ஒன்றைத் தவிர, இதில் ஒப்புகொள்ள இயலாத. அன்றாட வாழ்வில் காணப்படாத அசாதாரண விளைவு எதனையும் இக் கருத்து வலியுறுத்துவதில்லை என்று முடிவு செய்கிறோம்.

தொகைக்கெழுவியல் முறைப்படி நுகர்வோர் உபரி மதிப்பீடு

நுகர்வோர் உபரி அளவினை, தொகை நுண் கணித முறைப்படி (integral calculus), மதிப்பிட இயலும். ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $\phi(p)$ அல்லது $\psi(x)$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். அங்காடியில் அப் பொருளானது தேவைப்படும் அளவு x_0-ம், அதற்கேற்ற விலை p_0-ம் ஏதேனும் ஒரு விதத்தில் நிர்ணயிக்கப்படுவதெனவும் கருதுவோம். இது, நிறைவுப் போட்டியின் விளைவாகவோ, சர்வாதீன நிலையின் விளைவாகவோ, அல்லது யாதேனுமொரு (arbitrary) மதிப்பாகவோ அமையலாம். அப்பொழுது, p_0 என்ற அங்காடி (உண்மை) விலையைவிட அதிகமானதொரு விலையினை அப் பொருளுக்கு அளிக்க முன்வரும் நுகர்வோர்கள், அவர்கள் எதிர்பார்த்த உச்ச அளவு விலையில் அல்லாமல், அதைவிடக் குறைந்த p_0 என்ற விலையில் அப் பொருள் கிடைப்பதனால், அதிகப்படியான பயனைப் பெறுகின்றனர். பொருளாதார அடிப்படையில் அமையும் சில எடுகோள்களுக்கு ஒப்ப, மொத்த நுகர்வோர் உபரிப் பயனானது, தேவை வளைவிற்கு கீழாகவும் $p = p_0$ என்ற புள்ளியில் அமையும் கிடைக்கோட்டிற்கு மேலாகவும் உள்ள பரப்பாக அமைவதைப் பின்வரும் விளக்கப் படத்தில் காணலாம். அதாவது, நுகர்வோர் உபரி அளவானது, தேவை வளைவின் மொத்தப் பரப்பிலிருந்து, x_0, p_0 என்ற பக்கங்கள் அமைந்த செவ்வகத்தின் பரப்பளவைக் கழித்தபின் பெறக்கூடிய அளவாக மதிப்பிடப்படுகிறது. கீழ்க்கண்ட விளக்கப் படத்தில், தேவை வளைவு மற்றும் அளிப்பு வளைவு ஆகியவற்றைக் கருதி, இரண்டின் மூலமாக பெறப்படும் பொருளின் விலையினைக் கருதி, அதற்கேற்ற நுகர்வோர் உபரி கணக்கிடப்படுகிறது.



படம் 52.

$p = \psi(x)$ என்ற வடிவில் தேவைச் சார்பானது அமைந்திருப்பின், இப் படத்தில் உள்ள நிழற்குத்துப் பரப்பினைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் சூத்திரத்தின் மூலமாக, நுகர்வோர் உபரி மதிப்பிடப்படும்.

$$\text{நுகர்வோர் உபரி} = \int_0^{x_0} \psi(x)\,dx - (p_0\,x_0)$$

($\int$ என்பது தொகையிடற் குறியாகும்.)

இதற்கு மாறாக, தேவைச் சார்பு $x = \phi(p)$ என்று கொடுக்கப் படின்,

$$\text{நுகர்வோர் உபரி} = \int_{p_0}^{M} \phi(p)\,dp$$

என்று மதிப்பிடப்படும். இங்கு, படத்தின் கிடைப் பரப்பு பயன் படுத்தப்படுகின்றது. M என்பது, $x = 0$ என்ற மதிப்புக்குத் தக்க p - மதிப்பினைக் குறிக்கும்.

மேற்கண்ட இரண்டு சூத்திரங்களின் வாயிலாகவும் பெறப் படும் நுகர்வோர் உபரி அளவானது ஒரு மதிப்பாக அமைவது குறிப்பிடத் தக்கது.

உதாரணம் 1

தேவைச் சார்பானது $p = 35 - 2x - x^2$ எனவும், $x_0 = 3$ எனவும் அமைந்தால், நுகர்வோர் உபரியினை கணக்கிடுக.

$p = \psi(x)$ என்ற வடிவில் தேவைச் சார்பு அமைவதால், முதல் சூத்திரம் பயன்படுத்தப்படும்.

$p = 35 - 2x - x^2$ என்பதில், $x_0 = 3$ எனப் பிரதியிட,

$$p_0 = 35 - (2 \times 3) - (3)^2$$
$$= 35 - 6 - 9 = 20 \text{ ஆகும்.}$$

∴ நுகர்வோர் உபரியானது

$$\int_0^{3} \psi(x)\,dx - (p_0\,x_0)$$

$$= \int_0^{3} (35 - 2x - x^2)\,dx - 60$$

$$= \left[35x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 - 60$$

$$= \left[35x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 - 60$$

$$= \left[(35 \times 3) - (3^2) - \left(\frac{3^3}{3}\right)\right]_0^3 - 60$$

$$= 105 - 9 - 9 - 60 = 105 - 78$$

$$= 27$$

∴ நுகர்வோர் உபரி : 27 ஆகும்.

உதாரணம் 2

தேவை விதியானது $p = \sqrt{9 - x}$ எனவும், தேவை அளவு $x_0 = 5$ எனவும் கொடுக்கப்படின், நுகர்வோர் உபரியினை மதிப்பிடுக.

இங்கு, பயன்படுத்துவதற்கு எளிதான சூத்திரத்தினை கருதலாம்.

$p = \sqrt{9 - x}$ என்பதிலிருந்து,

$p^2 = (9 - x)$ எனவும்,

$x = (9 - p^2)$ எனவும் பெறுகிறோம்.

இச் சார்பானது கருதுதற்கு எளிதாக அமைகிறது.

∴ தேவைச் சார்பு $x = \phi(p)$ என்ற வடிவில் உள்ளதால் இரண்டாவது சூத்திரத்தினைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$x_0 = 5$ எனப் பிரதியிட,

$9 - p^2 = 5$

அல்லது $p^2 = 4 \quad \therefore \quad p = +2$

(∴ விலையானது எதிர்க்கணிய மதிப்பைக் கருதுவதில்லை).

$\therefore \quad x_0 = 5 \; ; \; p_0 = 2.$

$x = 0$ என்று பிரதியிடுவதன் மூலம், உச்ச விலையானது

$9 - p^2 = 0$ அல்லது $p^2 = 9$

$\therefore \quad p = 3.$

அதாவது $M = 3$ என்று பெறப்படும்.

$\therefore$ நுகர்வோர் உபரி :

$$\int_{p_0}^{M} \phi(p)\, dp = \int_{2}^{3} (9 - p^2)\, dp$$

$$= \left[9p - \frac{p^3}{3} \right]_2^3$$

$$= \left[(9 \times 3) - \frac{3^3}{3} \right] - \left[(9 \times 2) - \frac{2^3}{3} \right]$$

$$= 27 - 9 - 18 + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{8}{3} = 2{\cdot}67 \text{ (ஏறத்தாழ).}$$

$\therefore$ நுகர்வோர் உபரியானது 2·67 ஆகும்.

உதாரணம் 3

தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகள் $p = (6 - x)^2$, $(0 \leqslant x \leqslant 6)$ என்றும், $p = 14 + x$ என்றும் கொடுக்கப்படுகின்றன. இந்நிலையில்,

(a) நிறைவுப் போட்டியில் தேவை, விலை ஆகியவை நிர்ணயிக்கப்படும்பொழுதும் ;

(b) சர்வாதீனத்தில், இலாப அளவு உச்சமாகத்தக்க, தேவை, விலை இவை நிர்ணயிக்கப்படும்பொழுதும்,

நுகர்வோர் உபரியினை மதிப்பிட்டறிக. இங்கு அளிப்புச் சார்பினை, இறுதிநிலைச் செலவுச் சாரபாகக் கருதுக.

இதில், பொருளின் விலையும், தேவை அளவும் இருவேறு நிலைகளில் (நிபந்தனைகட்குட்பட்டு) நிர்ணயிக்கப்படுகின்றன. ஒன்றன்பின் ஒன்றாக இவற்றைக்கருதி, நுகர்வோர் உபரி மதிப்புகளைக் கண்டறிகிறோம்.

(a) நிறைவுப் போட்டியில், அங்காடிச் சமநிலைக்குரிய நிபந்தனையாவது :

சராசரி விலை = இறுதிநிலைச் செலவு

($\therefore$ Average Revenue = Marginal Cost) என்பதாகும்.

இச் சமன்பாட்டின்படி அமையும் நிலையை இங்கு கருதுவோம் :

சராசரி விலை : $p = (6-x)^2, (0 \leqslant x \leqslant 6)$.

இறுதிநிலைச் செலவு : $\pi = 14 + x$.

எனவே, சமன்பாடானது

$$(6-x)^2 = 14 + x$$

அதாவது

$$(36 - 12x + x^2) = 14 + x$$

$$\therefore \quad 22 - 13x + x^2 = 0$$

$$\therefore \quad (x-11)(x-2) = 0$$

அதாவது $x = 11$ அல்லது 2.

ஆனால் $0 \leqslant x \leqslant 6$.

$\therefore \quad x_0 = 2$ ஆகும்.

இதற்கு இணையான விலையானது

$$p = (6 - 2)^2 = 4^2 = 16$$

$\therefore \quad p_0 = 16$ ஆகும்.

எனவே, முதற் சூத்திரப்படி,

நுகர்வோர் உபரி :

$$\int_0^2 (6 - x)^2 \, dx - 32$$

$$= \int_0^2 (36 - 12x + x^2) \, dx - 32$$

$$= \left[36x - 12\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 - 32$$

$$= \left[(36 \times 2) - (6 \times 4) + \frac{8}{3} \right] - 32$$

$$= 72 - 24 + \frac{8}{3} - 32$$

$$= \frac{56}{3}.$$

∴ நுகர்வோர் உபரி $\frac{56}{3}$ என்பதாகும்.

இரண்டாவது சூத்திரத்தினைப் பயன்படுத்துகையில், பின் வருமாறு அமையும் :

தேவைச் சார்பு $x = 6 - p^{\frac{1}{2}}$

$x = 0$ எனப் பிரதியிட, $M = (6)^2 = 36$ எனப் பெறுகிறோம். எனவே, நுகர்வோர் உபரி :

$$\int_{16}^{36} (6 - p^{\frac{1}{2}})\, dp$$

$$= \left[6p - \frac{p^{\frac{1}{2}+1}}{(\frac{1}{2}+1)} \right]_{16}^{36}$$

$$= (216 - 144) - \left(96 - \frac{128}{3}\right)$$

$$= 72 - \frac{160}{3} = \frac{56}{3}$$

∴ இரு முறைகளும் ஒரே மதிப்பைத் தருகின்றன.

(b) சர்வாதீனத்தில், சமநிலைக்குரிய சமன்பாடு :

இறுதிநிலை வருவாய் = இறுதிநிலைச் செலவு

(Marginal Revenue = Marginal Cost).

இது முக்கிய நிபந்தனை

அதாவது $\frac{dR}{dx} = \frac{d\pi}{dx}$

R = மொத்த வருவாய்; π : மொத்தச் செலவு.

தேவைச் சார்பு $p = (6 - x)^2$

$$= 36 - 12x + x^2.$$

$$\therefore \quad R = x \cdot p$$

$$= x(36x - 12x + x^3).$$

$$= 36x - 12x^2 + x^3.$$

எனவே $\frac{dR}{dx} = 36 - 24x + 3x^2.$

இறுதி நிலைச் செலவு : $\frac{d\pi}{dx} = 14 + x.$

எனவே,

$\frac{dR}{dx} = \frac{d\pi}{dx}$ என்பதிலிருந்து,

$$(36 - 24x + 3x^2) = 14 + x$$

என்று பெறுகிறோம்.

அதாவது, $3x^2 - 25x + 22 = 0$

அல்லது $(x - 1)(3x - 22) = 0.$

$\therefore \quad x = 1$ அல்லது $\frac{22}{3}$.

ஆனால் $0 < x < 6$; எனவே

$x_0 = 1$ ஆகும்.

மேலும், $p_0 = (6 - 1)^2 = 5^2 = 25$ ஆகும்.

∴ முதல் சூத்திரத்தின் படி,

நுகர்வோர் உபரி :

$$\int_0^1 (36 - 12x + x^2)\, dx - 25$$

$$= \left[36x - \frac{12 \cdot x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 25$$

$$= \left(36 - 6 + \frac{1}{3}\right) - 25$$

$$= 5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3}.$$

எனவே, சர்வாதீனத்தில், பொருளின் விலை அதிகரிக்கப்பட்டிருப்பதால், நுகர்வோர் உபரியானது அளவிற் குறைந்திருக்கக் காணலாம். (சென்னை ; ஏப்ரல் '71)

உதாரணம் 4

சர்வாதீனத்தில் விற்கப்பட்ட பொருளின் அளவும் அதற்கு இணையான விலையும் $y = 20 - 4x^2$ என்ற தேவைச் சார்பின் படியும், $y^2 = 2x + 6$ என்ற இறுதிநிலைச் செலவின் படியும் ஊதியம் உச்ச மிகுதிப் படுத்தும்படியாக நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. இதற்கு இணையான நுகர்வோர் உபரியினைத் தீர்மானிக்கவும்.

சர்வாதீனத்தில், ஊதியம் உச்ச மிகுதிப் படுத்தும்படியான நிபந்தனையாவது

இறுதிநிலை வருவாய் = இறுதிநிலைச் செலவு.

அதாவது, $\frac{dR}{dx} = \frac{d\pi}{dx}$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்டவை :

தேவைச் சார்பு : $y = 20 - 4x^2$

அதாவது $p = 20 - 4x^2$

எனவே $R = x \cdot p$

$= 20x - 4x^3$

$$\therefore \frac{dR}{dx} = 20 - 12x.$$

மேலும், இறுதிநிலைச் செலவுச் சார்பு

$$y^2 = 2x + 6$$

அதாவது $\frac{d\pi}{dx} = 2x + 6.$

$\therefore \quad \frac{dR}{dx} = \frac{d\pi}{dx}$ என்பதிலிருந்து,

$$20 - 12x^2 = 2x + 6$$

அதாவது $12x^2 + 2x - 14 = 0$

அல்லது $6x^2 + x - 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 168}}{12}$$

$$= \frac{13 - 1}{12} = +1$$

எனப் பெறுகிறோம்.

$$\therefore \quad x_0 = 1.$$

இதைப் பிரதியிட்டு, $p_0 = 20 - 4 . (1)^2$

$$= 16$$

எனப் பெறுகிறோம்.

$\therefore$ முதல் சூத்திரப்படி, நுகர்வோர் உபரி :

$$\int_0^1 (20 - 4x^2)\, dx - 16$$

$$= \left[20x - 4\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - 16$$

$$= 20 - \frac{4}{3} - 16 = \frac{8}{3}$$ ஆகும்.

பயிற்சி

1. ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பானது, $p = 100 - 5D - D^2$ ஆகும். (a) $p_0 = 0$; (b) $p_0 = 11$; (c) $p_0 = 25$ என்ற மதிப்புகளுக்கு, நுகர்வோர் உபரியினைத் தீர்மானிக்கவும்.

(சென்னை; செப். '71)

2. தேவைச் சார்பு $p = 85 - 4x - x^2$ எனில், (a) $x_0 = 5$; (b) $p_0 = 64$; என்ற மதிப்புகளுக்கு, நுகர்வோர் உபரியினைத் தீர்மானிக்கவும்.

3. $p = 39 - 3x^2$ என்பது பொருளின் தேவைச் சார்பெனில், பின்வரும் நிலைகளில் நுகர்வோர் உபரியினை மதிப்பிடுக.

(a) $x_0 = \frac{5}{2}$; (b) பொருள் இலவசமாகக் கிடைக்கும் நிலையில்; அதாவது $p_0 = 0$.

4. தேவைச் சார்பு $p = 100 - 2D - D^2$; (a) $p_0 = 1$; (b) $p_0 = 5$; (c) $p_0 = 0$ என்ற மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் தக்க, நுகர்வோர் உபரி மதிப்பைக் கண்டறிக. வரைபடத்தின் மூலம் விளக்கமும் தருக.

5. $p = 81 - D^4$ என்ற தேவைச் சார்பினில் (a) $p_0 = 0$, (b) $p_0 = 10$; (c) $p_0 = 36$ என்றும் மதிப்புகட்குத் தக்க நுகர்வோர் உபரி அளவுகளை மதிப்பிடுக. வரைபடத்தின் மூலம் விளக்குக.

6. பொருளின் தேவை அளவும், அதற்கு இணையான அதன் விலையும், நிறைவுப் போட்டியில், $p = 16 - x^2$ என்ற தேவைச் சார்பு; $p = 4 + x$ என்ற அளிப்புச் சார்பு ஆகியவற்றின் மூலமாக நிர்ணயிக்கப் படுகின்றன. இதற்கு இணையான நுகர்வோர் உபரியினைக் கணக்கிடுக. தகுந்த விளக்கப்படம் வரைக.

7. நிறைவுப் போட்டியில், தேவை மற்றும் விலை ஆகியவை $p = 36 - x^2$ என்னும் தேவை சார்பின்படியும், $p = 6 + \frac{x^2}{4}$ என்னும் அளிப்புச் சார்பின்படியும் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றன. இதற்கிணையான நுகர்வோர் உபரி மதிப்பைக் கண்டறிக.

8. நிறைவுப் போட்டியில், தேவை, அளிப்புச் சார்புகள் முறையே $p = \frac{1}{4}(9 - x)^2$; $p = \frac{1}{4}(1 + 3x)$ ஆகும். மேலும், அப்பொருளுக்கு சராசரி வரி 3 என்பதாக விதிக்கப்படின், நுகர்வோர் உபரி அளவில் எவ்வளவு குறைகிறதெனக் காண்க. தகுந்த விளக்கப்படமும் வரைக.

9. விற்கப்படும் பொருள் அளவும், அதற்கு இணையான விலையும், சர்வாதீனத்தில், $p = 16 - x^2$ என்ற தேவைச்சார்பு, மற்றும் $Q' = 6 + x$ என்ற இறுதிநிலைச் செலவு விதி ஆகியவற்றின் மூலம் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றன. இந்நிலையில் ஏற்படும் நுகர்வோர் உபரி மதிப்பை கண்டறிக. ஊதியம் மிச்ச மிகுதிப் படுத்துவதாகக் கொள்க.

10. சர்வாதீனத்தில், பொருளின் தேவையும், விலையும் $p = 45 - x^2$ என்ற தேவைச் சார்பின்படியும், $Q' = 6 + \frac{x^2}{4}$ என்ற இறுதிநிலைச் செலவுச் சார்பின் படியும் தீர்மானிக்கப் படுகின்றன. இதற்கு இணையான நுகர்வோர் உபரியினை மதிப்பிடுக.

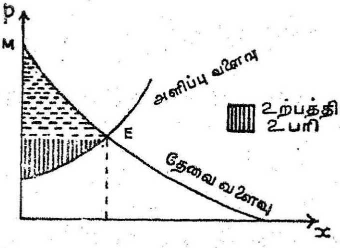
உற்பத்தியாளர் உபரி (Producer's Surplus)

நுகர்வோர் உபரிக் கருத்துக்கு இணையாக, உற்பத்தியியலில் பெறப்படும் கருத்து உற்பத்தியாளர் உபரியாகும். சில பொருட்களை நாம் வாங்கும் பொழுது, அப்பொருட்களின் உண்மையான அங்காடி விலையினைவிட அதிகமானதொரு விலையினைத் தருவதற்கு, சில சமயங்களில் முன் வருகிறோம். இவ்வாறு நம்மால் அளிக்கப்படவிருக்கும் அதிகப்படி விலைக்கும், பொருளின் உண்மையான விலைக்கும் இடையில் உள்ள வேறுபாடானது நுகர்வோர் உபரி என வரையறுக்கப்பட்டது. இதேபோல, உற்பத்தி இயலிலும் அதிகப்படியாகப் பெறப்படும் ஒருவிதப் பயனை கருதலாம். இது, பொருளை உற்பத்தி செய்வோருக்குக் கிடைக்கும் அதிகப்படி அல்லது உபரி இலாப அளவாக மதிப்பிடப்படுகின்றது. அதாவது, ஒரு பொருளிற்கு நிர்ணயிக்கப்படும் அங்காடி விலையினைக் காட்டிலும் குறைந்ததொரு விலையில் உற்பத்தியாளன் அப் பொருளை அளிப்பதற்கு முன்வரும் நிலையில், அவனுக்குக் கிடைக்கும் அதிகப்படி இலாபத்தினை உற்பத்தியாளர் உபரி எனக் கூறுகிறோம். சுருங்கக் கூறின், அப்பொருளினை விற்காமல் போவதைவிட, குறைந்த விலையிலேனும் அதனை அளிக்க முன்வருதலின் மூலம் இத்தகையதொரு உபரிப் பயன் அவனுக்குக் கிட்டுகின்றது.

இதன் வரையறையாவது : ஒரு பொருளின் நிர்ணயிக்கப் பட்ட விலைக்கும், உற்பத்தியாளர் கொடுக்க முன்வரும் குறைந்த விலைக்கும் உள்ள வேறுபாடானது உற்பத்தியாளர் உபரி எனப் படும்.

கணித இயலின் அடிப்படையில், இந்த உற்பத்தியாளர் உபரி மதிப்பினை, தொகை நுண்கணித முறையினைப் பயன்படுத்திப் பின் வருமாறு கணக்கிடலாம்.

ஒரு பொருளின் அளிப்பு வளைவும் (supply curve), மொத்த அளிப்பு x_0-ம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதெனக் கருதுவோம். அளிப்புச் சார்பு $p = s(x)$ என்றோ, அல்லது $x = g(p)$ என்றோ கொடுக்கப் படலாம். அப்பொருளின் அங்காடி விலை p_0 ஆனது, நிறைவுப் போட்டியில், அல்லது சர்வாதீனத்தில், அல்லது ஏதேனும் ஒரு விதத்தில் நிர்ணயிக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம்.



படம் 53.

இந் நிலையில், அப் பொருளின் விலையான p_0-ஐக் காட்டிலும், மிகக் குறைந்த ஒரு விலையில் அப் பொருளை விற்பதற்கு முன்வரும் உற்பத்தியாளர்கள் அவர்கள் எதிர்பார்த்த மிகக் குறைந்த விலையில் அல்லாமல் அதைவிட அதிகமான p_0 என்ற விலையானது அதற்கு அமைவதனால், அதிகப்படி இலாபத்தினைப் பெறுகின்றனர். இத்தகைய, உற்பத்தியாளர் மொத்த உபரி இலாப அளவானது, விளக்கப் படத்தில் அளிப்பு வளைவிற்கு மேலாகவும், $p = p_0$ என்ற புள்ளியில் அமைந்த கிடைக்கோட்டிற்கு கீழாகவும் உள்ள பரப்பளவாக அமையக் காண்கிறோம். இது, உற்பத்தியாளர் உபரி மொத்த மதிப்பாகும். இந்த உபரி இலாப அளவானது, (x_0, p_0) என்ற பக்கங்களை உடைய செவ்வகத்தின் பரப்பிலிருந்து, அளிப்பு வளைவின் பரப்பினை நீக்கியபின் வரும் எஞ்சிய பரப்பாகக் கணக் கிடப்படும். விளக்கப் படத்தினைக் கருதுக.

அளிப்பு விதி $p = s(x)$ என்ற வடிவில் தரப்படுகையில், இப் படத்தில் காணப்படும் நிலக்குத்துப் பரப்பினை (பகுதியினை) பயன்படுத்தி, உற்பத்தியாளர் உபரியானது

$$(x_0 \, p_0) - \int_0^{x_0} s(x) \, dx$$

என்ற சூத்திரத்தின்படி மதிப்பிடப்படும்.

அளிப்புச் சார்பு $x = g(p)$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பட்சத்தில், இப்படத்தின் கிடைப் பரப்பைப் பயன்படுத்தி,

$$\int_B^{p_0} g(p) \, dp$$

என்னும் சூத்திரம் வரையறுக்கப்படும்.

இதில் B என்பது, $x_0 = 0$ என்ற மதிப்புக்கு இணையான விலை ஆகும்.

உதாரணம் 1

அளிப்பு விதி $p = (x + 2)^2$; $p_0 = 25$. உற்பத்தியாளர் உபரியினை மதிப்பிடுக. கொடுக்கப்பட்டவை :

அளிப்புச் சார்பு : $p = (x + 2)^2$;

$p_0 : 25.$

$\therefore \quad s(x) = x^2 + 4x + 4.$

$p_0 = 25$ எனப் பிரதியிட,

$(x + 2)^2 = 25$

$\therefore \quad x + 2 = 5$

$\therefore \quad x = 3 \qquad \therefore \quad x_0 = 3.$

... ...

எனவே முதல் சூத்திரப்படி,

உற்பத்தியாளர் உபரி :

$$(x_0\, p_0) - \int_0^{x_0} s(x)\, dx$$

$$= 75 - \int_0^{3} (x^2 + 4x + 4)\, dx$$

$$= 75 - \left[\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 4x \right]_0^3$$

$$= 75 - [9 + 18 + 12 = 36.$$

இதில் இரண்டாவது சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி பின் வருமாறு கணக்கிடலாம்.

$$p = (x + 2)^2$$

அதாவது $\sqrt{p} = x + 2$

அல்லது $x = \sqrt{p} - 2$ ஆகும்.

$x = 0$ என்றால்,

$p = (0 + 2)^2 = 4$ ஆகும்.

$\therefore \; B = 4.$

$p_0 = 25$ எனக் காணப்பட்டது.

$\therefore$ உற்பத்தியாளர் உபரி :

$$\int_B^{p_0} g(p)\, dp = \int_4^{25} (\sqrt{p} - 2)\, dp$$

$$= \left[\frac{p^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 2p \right]_4^{25}$$

$$= \left(\frac{250}{3} - 50 \right) - \left(\frac{16}{2} - 8 \right)$$

$$= \frac{100}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right)$$

$$= \frac{180}{3} = 36$$

∴ இரு சூத்திரங்களும் ஒரே மதிப்பைத் தருகின்றன எனக் காணலாம்.

உதாரணம் 2

அளிப்பு விதி $p = \sqrt{9 + x}$; x_0 : 7. உற்பத்தியாளர் உபரியினைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டவை :

அளிப்பு விதி : $p = \sqrt{9 + x}$

அதாவது $p^2 = 9 + x$

அல்லது $x = p^2 - 9.$

$x_0 = 7$ என்கையில்,

$p_0 = \sqrt{9 + 7} = \sqrt{16} = 4.$

$x = 0$ எனப் பிரதியிட

$p = \sqrt{0 + 9} = 3.$

∴ $B = 3$ ஆகும்.

எனவே உற்பத்தியாளர் உபரி :

$$\int_3^4 (p^2 - 9)\, dp = \left(\frac{p^3}{3} - 9p\right)_3^4$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} - (9 \times 4)\right) - \left(\frac{3^3}{3} - (9 \times 3)\right)$$

$$= \left(\frac{64}{3} - 36\right) - (9 - 27)$$

$$= 18 - \frac{44}{3} = \frac{10}{3}.$$

உதாரணம் 3

அளிப்பு விதி $p = 4e^{x/3}$ என்றும், $x_0 = 3$ என்றும், கொடுக்கப்பட்டால், உற்பத்தியாளர் உபரியினைக் கணக்கிடவும்.

அளிப்பு விதி : $p = 4e^{x/3}$.

$x_0 = 3$ எனப் பிரதியிட,

$$p_0 = 4e^{3/3} = 4e.$$

e என்பது அடுக்குக்குறி (exponential) ஆகும். முதல் சூத்திரப்படி, உற்பத்தியாளர் உபரியானது

$$(3 \times 4e) - \int_0^3 4e^{x/3}\,dx = 12e - \left[\frac{4e^{x/3}}{\frac{1}{3}}\right]_0^3$$

$$= 12e - (12e^{x/3})_0^3$$

$$= 12e - (12e - 12)$$

$$= 12$$

[கோட்பாடு :

$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$ ஆகும் ; a—மாறிலி.]

உதாரணம் 4

ஒரு நிறுவனத்தின் தேவை மற்று அளிப்பு வளைவுகள் முறையே $p = (6 - x)^2$, $0 \leqslant x \leqslant 6$, என்றும். $p = 14 + x$ என்றும் கொடுக்கப்படுகின்றன. பொருளின் விலை மற்றும் தேவை அளவு ஆகியவை சர்வாதீன நிலையில் நிர்ணயிக்கப் படுவதாகக் கொண்டு, உற்பத்தியாளர் உபரியினை மதிப்பிடவும். இலாப அளவு உச்சப்படுத்தப் படுவதெனவும், அளிப்புச் சார்பு இறுதி நிலைச் செலவுச் சார்பு ஒத்ததெனவும் கருதுக. கொடுக்கப் பட்டவை :

தேவைச் சார்பு : $p = (6 - x)^2$

$$= 36 - 12x + x^2 ; \ (0 \leqslant x \leqslant 6)$$

அளிப்புச் சார்பு : $p = 14 + x$.

$$\therefore \ R = 36x - 12x^2 + x^3$$

எனவே $\frac{dR}{dx} = 36 - 24x + 3x^2$ ஆகும்.

இறுதிநிலைச் செலவு $\frac{d\pi}{dx} = 14 + x$.

சர்வாதீன இலாப அளவு உச்சமிகுதிப் படுத்தப்பட மிகத் தேவையான நிபந்தனை :

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d\pi}{dx}$$

அதாவது $36 - 24x + 3x^2 = 14 + x$

அல்லது $3x^2 - 25x + 22 = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{+25 \pm \sqrt{625 - 264}}{6}$$

$$\therefore \quad x = 1 \text{ அல்லது } \frac{22}{3}.$$

ஆனல் $0 \leqslant x \leqslant 6$ என்பதால் $x_0 = 1$ ஆகும். இதற்கு இணையான சர்வாதீன விலை

$$p_0 = (6 - 1)^2 = 5^2 = 25.$$

$\therefore$ உற்பத்தியாளர் உபரி :

$$(1 \times 25) - \int_0^1 (14 + x)\, dx$$

$$= 25 - \left[14x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 25 - \left(14 + \frac{1}{2}\right)$$

$= 10{\cdot}5$ ஆகும்.

$\therefore$ சர்வாதீனத்தில், உற்பத்தியாளர் உபரி $10{\cdot}5$ என்ருகும்.

[குறிப்பு: இங்கு, அளிப்பு விதியினை இறுதிநிலைச் செலவுச் சார்பாகக் கொள்வது குறிப்பிடத்தக்கது. சில நிலைகளில் இது சாத்தியமாகிறது]

பயிற்சி

1. அளிப்பு விதியானது $p = 9x + 2$ எனவும், $x_0 = 30$ எனவும் கொடுக்கப்பட்டால், உற்பத்தியாளர் உபரியினை மதிப்பிடுக. வரைபடத்தின் மூலம் விளக்குக.

2. அளிப்பு விதி $p = x^2 + 4x + 16$ என்றும், $x_0 = 25$ என்றும் இருந்தால், உற்பத்தியாளர் உபரியினைத் தீர்மானிக்கவும்.

3. நிறைவுப் போட்டியில், தேவைச் சார்பு $p = 16 - x^2$ என்றும், அளிப்புச் சார்பு $p = 4 + x$ என்றும் அமைந்திருக்கும் நிலையில், அதற்கேற்ற, உற்பத்தியாளர் உபரியினைத் தீர்மானிக்கவும். பொருத்தமான விளக்கப்படம் வரைக.

4. நிறைவுப் போட்டியில் ஒரு பொருளின் விலை மற்றும் தேவை அளவு $p = 36 - x^2$ என்ற தேவை விதிப்படியும், $p = 6 + \frac{x^2}{4}$ என்ற அளிப்பு விதிப்படியும் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றன. இதற்கேற்ற உற்பத்தியாளர் உபரியினை மதிப்பிடுக. வரைபடம் வரைக.

5. சர்வாதீனத்தில், ஒரு பொருளின் தேவை $p = 16 - x^2$ என்றும், அளிப்பு $Q' = 6 + x^2$ என்றும் இறுதிநிலைச் செலவுச் சார்பின் மூலமாகவும், தரப்படுகின்றன. இதற்கு இணையான உற்பத்தியாளர் உபரி மதிப்பை தீர்மானிக்கவும்.

18. கூட்டு வட்டி, இன்றைய மதிப்பு, மூலதன மதிப்பு

(Compound Interest, Present Value and Capital Value)

பொருளாதாரத் துறையில், அடுக்குக் குறிச் சமன்பாடுகளை (exponential functions) நாம் அடிக்கடி கையாள வேண்டியிருக்கிறது என அறிகிறோம். உதாரணமாக, இன்றைய, முதல் மதிப்புகளுக்குச் சார்ந்த கூட்டு வட்டி விகிதங்களைப் பற்றிப் படிக்கும் போது அடுக்குக் குறிச் சமன்பாடு மிகவும் பயன்படுவதைக் காண்கிறோம்,

பாங்குகளின் (banks) மொழியில், ஒரு குறிப்பிட்ட பணத் தொகையைப் பயன்படுத்துவதற்காக செலுத்தப்படும் ஒரு ஒப்பந்தத் தொகையை 'வட்டி' (interest) என்று அழைக்கிறோம்.

கைமாற்ருக அல்லது பயன்படுத்துவதற்காக வாங்கப்படும் பணத்தை 'மூலதனம்' (principal) என்றும், இந்த மூலதனத்துக்கான வட்டி விகிதத்தை "வட்டி வீதம்" (rate of interest) என்றும் கூறுகிறோம். இங்கு வட்டி வீதத்தை; சதவிகிதத்தில் (விழுக்காடு முறையில்) குறிக்கலாம். முழுகால வரைக்கும் மூலதனத்துக்குக் கணக்கிடப்படும் வட்டியை "சாதாரண வட்டி" (simple interest) என்று அழைக்கிறோம். ஒரு குறிப்பிட்ட காலவரையில் மூலதனத்துக்கான வட்டியை கணித்த பின்னர், அந்த வட்டித் தொகையை மூலதனத்துடன் சேர்த்து, அந்த கூட்டுத் தொகைக்கான அடுத்த காலவரைக்கான வட்டியைக் கணித்து, பிறகும் இதேபோலச் செய்தால் அந்த வட்டியை "கூட்டு வட்டி" (compond interest) என்கிறோம். வழக்கமாக "கூட்டு வட்டிக் கால வரை" (compond interest period), ஒரு வருடகாலம், அல்லது ஒரு ஆறுமாத காலம், அல்லது 3 மாதகால வரையாக இருக்கலாம். அதாவது 1 வருடத்துக்கு ஒரு தடவை வட்டி

கணித்து மூலதனத்துடன் அவ்வப்போது கூட்டப்பட்டால், (வருடா வருடம் மூலதனத்தின் மதிப்பு மாறிக் கொண்டிருக்கும்), கூட்டுவட்டிக் காலவரை ஒரு வருடமாகும். ஆறுமாதங்களுக்கு ஒருமுறை வட்டி மூலதனத்துடன் கூட்டப்பட்டால், கூட்டுவட்டிக் காலவரை ஆறுமாதங்களாகும் மூன்று மாதங்களுக்கு ஒருமுறை வட்டி மூலதனத்துடன் கூட்டப்பட்டால், கூட்டுவட்டிக் காலவரை மூன்று மாதங்களாகும். உதாரணமாக ஒரு பாங்க், ஒரு மாணவனுக்கு ஆண்டொன்று 6 சதவீத வட்டியில் 100 ரூபாய் கடன் தருகிறது எனக்கொள்வோம்.

ஓர் ஆண்டுக் கடைசியில் பாங்குக்குக் கிடைக்கும் மொத்த பணம்

$$= ரூ. 100 + 100 \times (0{\cdot}06)$$

$$= ரூ. 100 (1 + 0{\cdot}06)$$

$$= ரூ. 106{\cdot}00.$$

9 மாதங்களுக்குப் பின்னரே கடன் அடைக்கப்பட்டு விட்டால் பாங்குக்குக் கிடைக்கும் தொகை,

$$= 100 + 100 \left(\frac{9}{12}\right)(0{\cdot}06)$$

$$= 100\left(1 + \frac{9}{12}0{\cdot}06\right)$$

$$= ரூ. 104{\cdot}50.$$

A = மூலதனத் தொகை

i = வட்டி வீதம்

x = காலவரை

y = கொடுக்கப்பட்ட காலவரைக் கடைசியில் கிடைக்கப் பெற்ற தொகை.

என்றால்,

y கணிக்கும் சூத்திரம் $y = A(1 + xi)$. (18·1)

வருடத்துக்கொரு முறை கூட்டப்படும் அடிப்படையில் வட்டி கூட்டப்பட்டால், அதற்கான சூத்திரம்

$$y = A(1 + i)^x. \quad (18{\cdot}2)$$

இது எப்படி என்றால், முதல் வருடக் கடைசியில் y-ன் மதிப்பு

$$y_1 = A(1+i)$$

இரண்டாம் ஆண்டுக் கடைசியில்

$$\begin{aligned} y_x &= y_1 + y_1(i) = y_1(1+i) \\ &= A(1+i)(1+i) \\ &= A(1+i)^2. \end{aligned}$$

இதே மூன்றும் ஆண்டுக் கடைசியில் $y_3 = A(1+i)^3$.

அதே போல x வருடக் கடைசியில் Y-ன் மதிப்பு

$$\begin{aligned} Y_x &= Y \\ &= A(1+i)^x. \end{aligned}$$

இப்போது வட்டி ஒரு வருடத்துக்குக் குறைந்த காலவரையில் கூட்டப்பட்டால் (அதாவது ஆறுமாத காலவரை, 3 மாத காலவரையில்) சூத்திரத்தை வரையறுக்கலாம். ஒரு வருடத்தில் m தடவைகள் கூட்டப்பட்டால்,

$$\begin{aligned} Y &= A\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mx}. \\ &= A\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m/i}\right]^{ix} \\ &= A\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{ix} \end{aligned}$$

இங்கு $\frac{m}{i} = n$ என்க. ... ... (18·3)

$m \longrightarrow \infty$ என்றால் $n \longrightarrow \infty$ ஆகும்.

மேலும் கணித முறையில் $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$ என்பதால்

m மிக அதிகமான எண் எனும்போது

$$Y = A \cdot e^{ix} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (18{\cdot}4)$$

அதாவது கணக்கற்ற தடவைகள் (மிக மிக அதிகத் தடவைகள்) வட்டி ஒவ்வொரு தடவையிலும் கூட்டப்பட்டால், கூட்டு வட்டிக்கான சூத்திரத்தை

$Y = Ae^{ix}$ என்று எழுதுகிறோம்.

இங்கு $Y = Y(i)$; அதாவது i-ன் சார்பலனாக Y இருக்கிறது. பல பொருளாதார வல்லுநர்கள் இந்த சூத்திரத்தை முதலீட்டுக் கோட்பாடுகளுக்கு (Investment Theory)ப் பயன்படுத்துகின்றனர். அவர்கள் முதலீட்டை வட்டி வீதம் i-ன் சார்பலனாகக் கருதுகின்றனர்.

(4) சமன்பாட்டை மாற்றி எழுதினால்

$$\frac{Y}{e^{ix}} = A$$

அதாவது $A = Y \cdot e^{-ix}$ ... ... (18·5)

கூட்டு வட்டி வீதமானது, ஆண்டொன்றுக்கு i என்றால், x ஆண்டுகளுக்குப்பின், x ஆவது ஆண்டின் கடைசியில் Y அளவு தொகை கிடைப்பதற்கு, எவ்வளவு பணத்தை (A-ஐ) முதலீடு செய்ய வேண்டும் என்பதை சமன்பாடு (5)-ன் மூலம் தீர்மானிக்கலாம்,

இங்கு A என்பது, x ஆண்டுகளுக்குப்பின் கிடைக்கும் Y-ன் இன்றைய மதிப்பு (Present value of Y) ஆகும். "ஆண்டுத் தொகை" (Annuity)-ஐக் கணக்கிடுவதற்கு சமன்பாடு (5) மிகவும் பயன்படுகிறது. இந்த ஆண்டுத் தொகை என்பது சமமான கால வரையில் அளிக்கப்படும் தொகையின் தொகுப்பு (a sequence of equal periodic payment) ஆகும். பல சமயங்களில் வழங்கப்படும் தொகைகளுக்கான இன்றைய மதிப்புகளின் கூடுதல். ஒரு 'ஆண்டுத் தொகை' யின் இன்றைய மதிப்பு ஆகும் (present value of an annuity).

m ஒரு முடிவுடைய (finite) எண் என்றால்,

$Y = A\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mx}$ என்று முன்னர் கண்டோம். இங்கு x ஒரு தொடர்ச்சியற்ற, தனித்த (discrete) மாறி m ஒரு முடிவிலி எண் என்றால்

$Y = A \cdot e^{ix}$ என்றும் குறித்தோம்.

இங்கு x ஒரு தொடர் மாறியாகும் (continuous variable).

இதேபோல வட்டி ஓர் ஆண்டுக்கு m தடவைகள் $100\, i$ சதவீத வட்டி விதத்தில் கூட்டப்பட்டால்,

$$A\text{-ன் மதிப்பு} \qquad A = \frac{Y}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mx}}.$$

இந்த வட்டி ஒரு ஆண்டுக்கு எண்ணற்ற தடவைகள் (தொடர்ச்சியாக) $100\, i$ சதவீத வட்டி வீதத்தில் கூட்டப்பட்டால்

$$A\text{-ன் மதிப்பு} \qquad A = Y e^{-ix}$$

$$Y\text{-ன் இன்றைய மதிப்பு } A = Y e^{-ix}.$$

மாதிரி

ஒரு பாங்கு புதிதாக ஆரம்பிக்கப்படும் சேமிப்புத் தொகைகளுக்கு 6 மாதக் காலவரைகளுக்கு 4% வட்டி வீதம் (கூட்டு வட்டி) தருவதாகக் கொள்வோம். இன்றையிலிருந்து மூன்று ஆண்டுகள் கழிந்தபின் 100 ரூபாய் கிடைப்பதற்காக இன்றைக்கு எவ்வளவு பணம் சேமிப்புத் தொகையாக பாங்கில் போட வேண்டும்?

இங்கு $i = 0{\cdot}04$

$x = 3.$

$y = 100.$

இன்றைக்குப் போடும் சேமிப்புத் தொகை $= A$ என்றால் A-ன் மதிப்பு,

$$\begin{aligned} A &= y \cdot e^{-ix} \\ &= 100 \cdot e^{-0.04 \times 3} \\ &= 100 \times e^{-0.12}. \\ &= 88{\cdot}80 \text{ ரூபாய்.} \end{aligned}$$

அதாவது இன்றைக்கு ரூ. 88·80-யைச் சேமிப்பில் போட்டால், 4% சதவீத வட்டி வீதத்தில், 6 மாதங்களுக்கு ஒரு முறை கூட்டு வட்டி கூட்டப்பட்டால், 3 வருடங்களுக்குப் பின்னர் 100 ரூபாய் கிடைக்கும்.

அதாவது ரூ. $88 \cdot 80\, e^{0.04\,(3)} = 100$ ரூபாய்.

இப்போது 6 காலவரைகளில் ஒவ்வொரு 6 மாதக் காலவரைக் கடைசியிலும் 100 ரூபாய் தொகை அளிக்கப்படவேண்டுமானுல் அந்த அளிக்கும் தொகைக்கான இன்றைய மதிட்பில் கண்டறிவோம். இங்கு வட்டி வீதம் 4% (6 மாதங்களுக்கு ஒருமுறை கூட்டப்படுகிறது)

முதல் 6 மாதங்களுக்குப்பின் தொகை கொடுக்கப்பட்டால் $(x = \frac{1}{2})$ என்றுல்

அந்தத் தொகைக்கான இன்றை மதிப்பு

$$= 100\,[e^{-0.04\,(\frac{1}{2})}]$$

$$= 100\, e^{-0.02}$$

$$= \underline{98 \cdot 04} \text{ ரூபாய்.}$$

$x = 1$ என்றுல், 1 வருடத்துக்குப்பின் (100 ரூபாய்) தொகை கொடுக்கப்பட்டல் அதன் இன்றைய மதிப்பு

$$= 100 e^{-0.04(1)} = 100\, e^{-0.04}$$

$$= \text{ரூ. } 96 \cdot 12.$$

$1\frac{1}{2}$-வது ஆண்டுக் கடைசியில் 100 ரூ. தொகையின் இன்றைய மதிப்பு

$$= 100\, e^{-0.04\,(\frac{3}{2})} = 100\, e^{-0.06} = 94 \cdot 23 \text{ ரூபாய்.}$$

2-வது ஆண்டுக் கடைசியில் 100 ரூ. தொகையின், இன்றைய மதிப்பு

$$100\, e^{-0.04(2)} = 100\, e^{-0.08} = 92 \cdot 38 \text{ ரூபாய்.}$$

$2\frac{1}{2}$-வது ஆண்டுக் கடைசியில் கிடைக்க இருக்கும் 100 ரூ. தொகையின் இன்றைய மதிப்பு

$$= 100\, e^{-004 \cdot (\frac{5}{2})}$$

$$= 100\, e^{-}e^{0.10}$$

$$= \text{ரூ. } 90 \cdot 57.$$

3-வது ஆண்டுக் கடைசியில் கிடைக்க இருக்கும் 100 ரூ. தொகையின் இன்றைய மதிப்பு

$$= 100^{-0.04(3)} = 100\ e^{-0.12}$$

$$= \text{ரூ. } 88{\cdot}90.$$

இதைக் கீழ்க் கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்துவோம்.

100 ரூபாய் செலுத்துவதற்கான காலவரை இறுதி	நூறு ரூபாயின் இன்றைய மதிப்பு ஒவ்வொரு கால வரை இறுதியிலும்
6 மாதங்கள் $x = \frac{1}{2}$	$100\ e^{-0{\cdot}04\left(\frac{1}{2}\right)} = 98{\cdot}04$
1 வருடம் $x = 1$	$100\ e^{-0{\cdot}04(1)} = 96{\cdot}12$
$1\frac{1}{2}$ வருடம் $x = \frac{3}{2}$	$100\ e^{-0{\cdot}04\left(\frac{3}{2}\right)} = 94{\cdot}23$
2 வருடம் $x = 2$	$100\ e^{-0{\cdot}04(2)} = 92{\cdot}38$
$2\frac{1}{2}$ வருடம் $x = \frac{5}{2}$	$100\ e^{-0{\cdot}04\left(\frac{5}{2}\right)} = 90{\cdot}57$
3 வருடம் $x = 3$	$100\ e^{-0{\cdot}04(3)} = 88{\cdot}80$

$e^{-0{\cdot}04\,(x)}$-ன் மதிப்பை கடைசியில் தரப்பட்ட அட்டவணையின் மூலம் கணக்கிடலாம்.

எனவே மூன்று வருடக் கால வரைகளில் ஒவ்வொரு 6 மாத காலத்தின் கடைசியிலும் 100 ரூபாயாகத் தருவதற்கு ஆன மொத்தத் தொகையின் இன்றைய மதிப்பு

$$\text{ரூ. } 98{\cdot}04 + 96{\cdot}12 + 94{\cdot}23 + 92{\cdot}38 + 90{\cdot}57 + 88{\cdot}80$$

$$\text{ரூ. } \underline{560.14}$$

அதாவது ஒரு நபர் இன்றைய தினம் ரூ. 560·14 பாங்கில் செலுத்தினால், ஒவ்வொரு 6 மாத இடைவெளிகளிலும் (மூன்று வருடங்களுக்கு) ரூ. 100=தொகை பெறுவார். ஏனெனில் பாங்கு

4% சதவீத வட்டியை 6 மாதங்களுக்கு ஒரு முறை கூட்டி, கூட்டு வட்டி தருகிறது. இந்த "இன்றைய மதிப்பின்" கோட்பாட்டை (concept) முதலீட்டுத் தத்துவங்களுக்கும், மூலதன தத்துவங்களுக்கும் (investment and capital theory) பயன்படுத்தலாம்.

ஒரு தொழில் நிறுவனம், $0, 1, 2, \ldots x$ கால வரைகளில் முறையே $Y_0, Y_1, Y_2 \ldots Y_x$ என்ற தொகைகளை வருமானங்களாகப் பெற இந்த "இந்த வருமானத் தொடரை"ப் (stream of income) பெற விரும்புகிறது எனக் கொள்வோம். ஆண்டொன்றுக்கு 1 சதவீத வட்டிவீதம் என்று (கூட்டு வட்டி) கணக்கிடப்பட்டால், அந்த நிறுவனம் அத்தகைய வருமானத் தொடருக்காக இன்றைய தினம் முதலீடு செய்ய வேண்டிய தொகையானது.

$$Y_0 + Y_1 e^{-i1} + Y_2 e^{-i2} + Y_3 e^{-i3} + \ldots + Y_x e^{-ix}$$

ஆகும். இந்தத் தொகையை மூலதன மதிப்பு அல்லது முதல் மதிப்பு (capital value) எனலாம். x-ஐ ஒரு தொடர் மாறியாகக் கருதினால், இத்தொகையை எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம் என்று ஆராய்வோம்.

$Y_0, Y_1, Y_2, \ldots Y_x$ என்பது $0, 1, 2, 3, \ldots x$ ஆண்டுகளில் (இங்கு x ஒரு தொடர் மாறியல்ல) கிடைக்கும் வருமானங்கள் என்க. இங்கு i என்பது ஆண்டொன்றுக்குடைய வட்டி வீதம் (கூட்டு வட்டியே). ஒரு தொழிற்சாலை இவ்வாறு ஆரம்பத்தில் Y_0 ரூபாயும், ஓராண்டு முடிவில் Y_1 ரூபாயும், 2-வது முடிவில் Y_2 ரூபாயும், ... x ஆண்டு முடிவில் X_x ரூபாயும் பெறுவதற்கு முதலீடு செய்ய வேண்டிய இன்றைய மதிப்பு

$$= Y_0 + \frac{Y_1}{1+i} + \frac{Y_2}{(1+i)^2} + \frac{Y_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{Y_x}{(1+i)^x}$$

ஆகும். இந்தக் கூட்டல் தொகை வருமானத் தொடருக்கான ஒரு முதல் தொகையாகும். ஒரு நிலப் பகுதியிலிருந்து இவ் வருடம் மேலும் x தொடர்ச்சியான வருடங்களில் கிடைக்கும் பயிர்களின் மதிப்புகளின் தொகுப்பை $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots Y_x$ என்றும் குறிக்கலாம். அல்லது ஒரு இயந்திரத்தின் மூலம் உற்பத்தியாகும் பொருட்களின் மதிப்புகளை இவ் வருடம், அடுத்த வருடக் கடைசியில் 2-ம் வருடக் கடைசியில், ... x-வது வருடக் கடைசியில் உற்பத்தியாகும் பொருள்களின் மதிப்புகளின் தொகுப்பை $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots Y_x$ என்றும் குறிக்கலாம். இவைகளுக்கான இன்றைய மதிப்பைக் கணக்கிட மேற்கூறிய சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். இங்கு i என்பது வட்டி வீதத்தைக் குறிக்கிறது. இந்த வருமானத்

தொடரோ, பயிர் மதிப்புகளின் தொடரோ, அல்லது உற்பத்தியாகும் பொருள்களின் தொடரோ, ஒரு தொடர்ச்சியான தொகுப்பாகும். இதையே பண மூலதனம் நிலத்தின் முதல் அல்லது மூலதன மதிப்பு, இயந்திரத்தின் மூலதன மதிப்பு (capital value) என்று முறையே கூறுகின்றோம். வட்டி வீதம், கால வரை இவற்றைப் பொறுத்து இந்த (மூலதன) முதல் மதிப்பு இருக்கும். ஒரே வருமானத் தொடருக்கோ மற்ற எந்த ஒரே மாதிரியான தொடருக்கோ, வட்டிவீதம் மாறும்போது, வெவ்வேறு முதல் மதிப்பு இருக்கும்.

மாதிரி

ஒரு சுரங்க நிறுவனத்தில் பங்குகள் இவ்வருடம், மேற்கொண்டு 4 தொடர்ச்சியான வருடங்களில் £40, £32, £24, £16, £8 லாப ஈவுகளையும் 5-வது வருடக் கடைசியில் £0 பூஜ்யம் லாப ஈவையும் தருவதாகக் கொள்வோம். வருடத்துக்கு ஒரு முறை மட்டுமே 5% வட்டி கூட்டப்பட்டால் ஓல்டிங்கின் (holding) இன்றைய அல்லது முதல் (present or capital) மதிப்பு யாது ?

இங்கு $i = 0{\cdot}05$

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$Y_0 = 40, \quad Y_1 = 32, \quad Y_2 = 24, \quad Y_3 = 16$$

$$Y_4 = 8, \quad Y_5 = 0.$$

x இங்கு ஒரு தொடர்ச்சியற்ற மாறி.

ஏன் என்றால், வட்டி ஆண்டொன்றுக்கு ஒரு முறைதான் கூட்டப்படுகிறது.

எனவே இத்தகைய லாப ஈவு கிடைப்பதற்குப் பங்கு வைத்துக் கொள்வதற்கான ஓல்டிங்கின் இன்றைய மதிப்பு

$$= £\left[40 + \frac{32}{(1+0{\cdot}05)} + \frac{24}{(1+0{\cdot}05)^2} + \frac{16}{(1+{\cdot}05)^3} + \frac{8}{(1+0{\cdot}05)^4} + \frac{0}{(1+0{\cdot}05)^5}\right]$$

$= £\ 112{\cdot}6$ (மடக்கையைப் பயன்படுத்தவும்).

இப்போது $i = 0{\cdot}025$ $(2\frac{1}{2}\%)$ என்றால்

$$\text{முதல் (மூல தன) மதிப்பு } £ = \left[40 + \frac{32}{1{\cdot}025} + \frac{24}{(1{\cdot}025)^2} + \frac{16}{(1{\cdot}025)^3} + \frac{8}{(1{\cdot}025)^4}\right]$$

$$= \underline{£\, 116{\cdot}2}$$

இந்தத் தொகைகளை இப்போது முதலீடு செய்தால் அடுத்த 5 ஆண்டுகளிலும், மேற்கூறிய வட்டி விகிதங்களில், மேற்கூறிய லாப ஈவுகள் கிடைக்கும்.

மாதிரி

ஒரு புதிய வர்த்தக நிறுவனத்தில் பங்குகள் வருட ஆரம்பத்திலும் பிறகு தொடர்ந்து மூன்று வருடங்களிலும் £ 1, £ 2, £ 4, £ 6 லாப ஈவுகளைத் தரும் என்று கொள்வோம். வருடம் ஒருமுறை 5% வட்டி கூட்டப்படுகிறது. நான்காவது ஆண்டில், அந்தப் பங்கு £120-க்கு விற்க எதிர்பார்க்கப்படுகிறது என்றால் அதற்கான முதல் மதிப்பு அல்லது இன்றைய மதிப்பு என்ன ?

இங்கு $i = 0{\cdot}05$

$x = 0, 1, 2, 3, 4$

$Y = £\, 1, 2, 4, 6, 120$ முறையே என்போம்.

$$\text{இன்றைய மதிப்பு} = Y_0 + \frac{Y_1}{1+i} + \frac{Y_2}{(1+i)^2} + \frac{Y_3}{(1+i)^3} = \frac{Y_4}{(1+i)^4}\,.$$

இங்கு ஆண்டொன்றுக்கு ஒரு முறை வட்டி கூட்டப்படுகிறது.

பயிற்சி

1. 100 ரூபாயின் மதிப்பு, 5 வருடங்களுக்குப் பின், $3\frac{1}{2}\%$ சதவீத வட்டியில் என்ன தொகையைக் கொடுக்கும் ? வட்டி

(i) ஆண்டொன்று ஒரு முறை

(ii) 6 மாதங்களுக்கு ஒரு முறை

(iii) தொடர்ச்சியாக

கூட்டப்பட்டால் கிடைக்கும் தொகையின் மதிப்புகள் எவ்விதத்தில் மாறுபடும் ?

2. அதே $3\frac{1}{2}$ சதவீத வட்டியில் வட்டி

(i) ஆண்டொன்றுக்கு ஒரு முறை

(ii) தொடர்ச்சியாக

கூட்டப்பட்டால், 10 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் 100 ரூபாய் கிடைக்க இப்போது எவ்வளவு முதலீடு செய்ய வேண்டும் ?

3. கணக்கு 1-லும், 2-லும், வட்டி வீதத்தை $2\frac{1}{2}$ % ஆகக் குறைத்துக் கணக்கிட்டால் மேற்படி மதிப்புகள் யாவை ?

4. ஒரு தேசிய சேமிப்புச் சான்றிதழ் 15 ரூபாய்க்கு விற்கப் படுகிறது. 10 ஆண்டுகளுக்குப் பின் அது 20 ரூபாயைக் கொடுக் கிறது. இப்போது வட்டி வீதமானது

(i) ஆண்டொன்றுக்கு

(ii) 6 மாதங்களுக்கு ஒரு முறை

(iii) தொடர்ச்சியாக

கூட்டப்பட்டால், மூன்று முறைகளுக்கு என்னென்ன வட்டி வீதங்கள் எனக் கணக்கிடவும்.

x ஒரு தொடர்ச்சியற்ற, தனித்த மாறியாகும்.

எனவே இன்றைய மதிப்பு

$$= £\left[1 + \frac{2}{1{\cdot}05} + \frac{4}{(1{\cdot}05)^2} + \frac{6}{(1{\cdot}05)^3} + \frac{120}{(1{\cdot}05)^4}\right]$$

$$= £\,110{\cdot}4$$

ஆகவே இத்தகைய மூலதனம் வட்டி வீதக் கணக்குகளில் மடக்கையும் அடுக்குக் குறிச் சார்பலன்களும் வெகுவாகப் பயன் படுத்தப்பட்டு வருவதைப் பார்க்கின்றோம். இப்போது ஒரு முக்கிய வகையைக் கவனிப்போம்.

ஒரு பொருளானது நிலையான அறிந்த செலவில் ஒரு குறித்த காலத்தில் ($t = 0$) உற்பத்தியாகிறது. அப்பொருள் உடனே விற்கப்பபட்டு விடுவதில்லை. சில காலம் நேரம் வரை பத்திரப் படுத்தி வைக்கப்படுகிறது. காலம் செல்லச்செல்ல, அப்பொருளின்

விலை கூடுகிறது. t வருடங்களுக்குப்பின், உதாரணமாக அப் பொருளின் விற்கும் விலையானது அலகு ஒன்றுக்கு $f(t)$ ரூபாய் ஆகிறது. எனவே பொருளின் விலை t என்ற நேரத்தின் சார்பலன், இச் சார்பலன் $f(t)$ அறிந்திருந்த சார்பலன், அத்துடன் t கூடக் கூட $f(t)$-ன் மதிப்பும் கூடுகிறது. உதாரணமாக 'ஒயின்' என்ற மதுபானம் ஒரு வணிகரால் வாங்கி பின் சிலகாலம் கழிந்தபின் அதிக விலையில் விற்கலாம் என்று பத்திரப்படுத்தி வைக்கப் படுகிறது. அதேபோல் ஒரு நிலப்பகுதியில் ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் மர உற்பத்தி செய்யப்படுகிறது. வெகு நாட்கள் கழித்து அம் மரங்கள் வெட்டப்பட்டு விற்கப்படுகின்றன. அதிக விலையில் விறகு, மரச் சாதனங்கள் விற்கப்படும் நேரத்தில் அவை வெட்டப் பட்டு அதிக விலையில் விற்கப்படுகின்றன. எந்த மிக உகந்த சமயத்தில் இவைகளை விற்கலாம் என்று கண்டறிவதே இப்போ துள்ள பிரச்சினையாகும்.

தேவைப்படுகிற காலவரைச் சமயம்வரை தொடர்ந்து ஆண் டொன்றுக்கு 100γ சதவீத வட்டி கூட்டப்படுகிறது எனக் கொள்வோம்.

t வருடங்களுக்குப் விற்கப்படும் பொருளின் ஒரு அலகுக்கான இன்றைய மதிப்பு x ரூபாய் என்றால்

$$x = f(t)\, e^{-\gamma t} \text{ ஆகும்.}$$

இதை நாம் முன்னமேயே கண்டோம். உற்பத்திச் செலவு (நிலையான) மாறுத மதிப்பு ஆதலால், t ஆண்டுகளுக்குப் பின் விற்பனையாகும் பொருளுக்கான நிகர இலாபம் = (t ஆண்டு களுக்குப்பின் அப்பொருளின் விலை)

— உற்பத்திச் செலவு.

உச்சமாக இருக்கிறது என்றால், t ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அப் பொருளின் விலை மதிப்பு x உச்சமாக இருக்கிறது என்று அர்த்தம்.

$x = f(t)\, e^{-\gamma t}$ என்பதால் t-ன் மதிப்பானது உச்சகட்ட x மதிப்புக்கேற்றவாறு கண்டுபிடிக்கப் படவேண்டும். அதாவது x மதிப்பு மிக அதிக விலையை அடைய எவ்வளவு காலம் கிடங்கில் அல்லது களஞ்சியத்தில் பாதுகாப்பாக வைத்திருக்கவேண்டும் என்பதே நம் பிரச்சினை. மிக உகந்த சேமிப்பு காலம்,

(i) $\frac{dx}{dt} = 0$

(ii) $\frac{d^2x}{dt^2} < 0$

என்ற நிபந்தனைகளைக்கொண்டு கணக்கிடப்படுகிறது.

அதாவது $x = f(t) \cdot e^{-\gamma t}$ என்றால்

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்கப்பட்டால்

$$\log x = \log f(t) - \gamma t$$

$$= F(t) - \gamma t \quad \text{இங்கு } F(t) = \log f(t) \text{ என்க.}$$

இப்போது t-க்கு வகைப்படுத்தினால்

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = F'(t) - r$$

மேலும் $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\ \frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

$= F''(t)$ ஆகும்.

மிக உகந்த சேமிப்பு காலத்துக்கான நிபந்தனைகள்.

(i) $F'(t) - \gamma = 0$

(ii) $F''(t) < 0$ ஆகும்.

$\therefore \quad F'(t) = \gamma$

$$\gamma = F'(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt}[\log f(t)]$$

$$= \frac{1}{f(t)} \cdot f'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \gamma$$

அதாவது $F'(t)$ ஆனது வட்டி வீதம் γ-க்குச் சமம்.

$\therefore$ மிக உகந்த விற்பனைச் சமயத்தில், r-க் கேற்ற பொருளின் விலையில் விகிதாசார உயர்வின் வீதம் சந்தை வட்டி வீதத்துக்குச் சமமாகிறது.

மேலும் $F''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\{\log[f(t)]\} = \frac{d}{dt}\left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right] < 0$

எனவே மதிப்பின் விகிதாசார உயர்வின் வீதம் மிக உகந்த விற்பனைக் காலத்தில், குறைந்து விடுகிறது எனக் காண்கிறோம்.

5. ஒரு மூலதனத்துக்கு ஆண்டொன்றுக்கு $100\gamma\,\%$ சத வீதத்தில் கூட்டப்பட்ட வட்டி, $100s\,\%$ சதவீதத்தில் ஆண்டொன்றுக்கு n தடவைகள் கூட்டப்பட்ட வட்டிக்குச் சமமானல்

$$\gamma = \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n - 1$$ என்று நிரூபித்துக் காட்டு.

6. வட்டி வீதம் 2% ஆண்டொன்றுக்கு என்றால், வட்டி

(i) ஆண்டொன்று ஒரு முறை

(ii) தொடர்ச்சியாக

கூட்டப்பட்டால் 10 ஆண்டுகளுக்குப் பின் 100 ரூபாய் கிடைக்க வேண்டுமானல், இப்போது எவ்வளவு முதலீடு செய்ய வேண்டும்? அதாவது 10 வருடத்துக்குப் பின் 100 ரூபாயின் இன்றைய மதிப்பு யாது ?

7. ஒரு அரங்கத்தின் சொந்தக்காரரின் வருமானம் முதல் ஆண்டில் £ 2000-ம் வருடா வருடம் £ 200 குறைந்தும் காணப் படுகிறது. வருமானம் பூஜ்யமாகும்வரையில் அவர் வருமானம் கணக்கிடப்படுவதாகக் கொள்வோம்.

(i) வட்டி வீதம் 4% என்றும்

(ii) வட்டி வீதம் 5% என்றும்

கூட்டப்பட்டபோது அவரின் வருமானத் தொடரின் இன்றைய மதிப்பு அல்லது முதல் மதிப்பு என்ன என்று மதிப்புபிடவும்.

8. ஒரு பொருள் £ a செலவில் உற்பத்தி செய்யப்பட்டு t ஆண்டுகளுக்குப் பின் அதன் விற்பனை விலை £ $f(t)$ ஆகிறது. £ a-க்கு ஆண்டொன்றுக்கு வட்டி வீதம் 100γ சதவீதம் (தொடர்ச்சியானது)மானது $f(t)$-க்குச் சமமானல், t-ன் சார்பல

ஞக γ-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி. வியாபாரி γ-ஐ உச்சப்படுத்த விரும்புகிறார் என்றால் மிக உகந்த சேமிப்பு காலம் t, γ-ன் உச்ச மதிப்பு இவை முறையே $f(t) = a \cdot e^{\gamma t}$, $f'(t) = \gamma f(t)$ என்பதன் மூலம் கிடைக்கிறது என்று நிரூபித்துக் காட்டுக.

9. ஒரு நிலப்பகுதியில் மர உற்பத்தி செய்ய செலவு £ 272 என்று இருக்கட்டும். t ஆண்டுகளுக்குப் பின் மரக் கட்டைகளின் மதிப்பு £ $100 \cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{t}}$ ஆகிறது. வட்ட வீதம் ஆண்டொன்றுக்கு 5% (தொடர்ச்சியானது) கூட்டப்பட்டால், 25 ஆண்டுகளுக்குப் பின் மரக்கட்டைகளின் இன்றைய மதிப்பு மிக மிக அதிகமாக இருக்கும் என்று நிரூபி.

அட்டவணை - 1

அடுக்குகளும் மூலங்களும்

(Powers and Roots)

எண்	வர்க்கம் Square	வர்க்க மூலம்	கனம் Cube	கன மூலம்	எண்	வர்க்கம் Square	வர்க்க மூலம்	கனம் Cube	கன மூலம்
1	1	1·000	1	1·000	31	961	5·568	29,791	3·141
2	4	1·414	8	1·260	32	1,024	5·657	32,768	3·175
3	9	1·732	27	1·442	33	1,089	5·745	35,937	3·208
4	16	2·000	64	1·587	34	1,156	5·831	39,304	3·240
5	25	2·236	125	1·710	35	1,225	5·196	42,875	3·271
6	36	2·449	216	1·817	36	1,296	6·000	46,656	3·302
7	49	2·646	343	1·913	37	1,369	6·083	50,653	3·332
8	64	2·828	512	2·000	38	1,444	6·164	54,872	3·362
9	81	3·000	729	2·080	39	1,521	6·245	59,319	3·391
10	100	3·162	1,000	2·154	40	1,600	6·325	64,000	3·420
11	121	3·317	1,331	2·224	41	1,681	6·403	68,921	3·448
12	144	3·464	1,728	2·289	42	1,764	6·481	74,088	3·476
13	169	3·606	2,197	2·351	43	1,849	6·557	79,507	3·503
14	196	3,742	2,744	2·410	44	1,936	6·633	85,184	3·530
15	225	3·873	3,375	2·466	45	2,025	6·708	91,125	3·557
16	256	4·000	4,096	2·520	46	2,116	6·782	97,336	3·583
17	289	4·123	4,913	2·571	47	2,209	6·856	103,823	3·609
18	324	4·243	5,832	2·621	48	2,304	6·928	110,592	3·634
19	361	4·359	6,859	2·668	49	2,401	7·000	117,649	3·659
20	400	4·472	8,000	2·714	50	2,500	7·071	125,000	3·684
21	441	4·583	9,261	2·759	51	2,601	7·141	132,651	3·708
22	484	4·690	10,648	2·802	52	2,704	7·211	140,608	3·733
23	529	4·796	12,167	2·844	53	2,809	7·280	148,877	3·756
24	576	4.899	13,824	2·884	54	2,916	7·348	157,464	3·780
25	625	5·000	15,625	2·924	55	3,025	7·416	166,375	3·803
26	676	5·099	17,576	2·962	56	3,136	7·483	175,616	3·826
27	729	5·196	19,683	3·000	57	3,249	7·550	185,193	3·849
28	784	5·292	21,952	3·037	58	3,364	7·616	195,112	3·871
29	841	5·385	24,389	3·072	59	3,481	7·681	205,379	3·893
30	900	5·477	27,000	3·107	60	3,600	7·746	216,000	3·915

அட்டவணை - 1 (தொடர்ச்சி)

எண்	வர்க்கம் Square	வர்க்க மூலம்	கனம் Cube	கன மூலம்	எண்	வர்க்கம் Square	வர்க்க மூலம்	கனம் Cube	கன மூலம்
61	3,721	7·810	226,981	3·936	81	6,561	9·000	531,441	4·327
62	3,844	7·874	238,328	3·958	82	6,724	9·055	551,368	4·344
63	3,969	7·937	250,047	3·979	83	6,889	9·110	571,787	4·362
64	4,096	8·000	262,144	4·000	84	7,056	9·165	592,704	4·380
65	4,225	8·062	274,625	4·021	85	7,225	9·220	614,125	4·397
66	4,356	8·124	287,496	4·041	86	7,396	9·274	636,056	4·414
67	4,489	8·185	300,763	4·062	87	7,569	9·327	658,503	4·431
68	4,624	8·246	314,432	4·082	88	7,744	9·381	681,472	4·468
69	4,761	8·307	328,509	4·102	89	7,921	9·434	704,969	4·465
70	4,900	8·367	343,000	4·121	90	8,100	9·487	729,000	4·481
71	5,041	8·426	357,911	4·141	91	8,281	9·539	753,571	4·498
72	5,184	8·485	373,248	4·160	92	8,464	9·592	778,688	4·514
73	5,329	8·544	389,017	4·179	93	8,649	9·644	804,357	4·531
74	5,476	8·602	405,224	4·198	94	8,836	9·695	830,584	4·547
75	5,625	8·660	421,875	4·217	95	9,025	9·747	857,375	4·563
76	5,776	8·718	438,976	4·236	96	9,216	9·798	884,736	4·579
77	5,929	8·775	456,533	4·254	97	9,409	9·849	912,673	4·595
78	6,084	8·832	474,552	4·273	98	9,604	9·899	941,192	4·610
9	6,241	8·888	493,039	4·291	99	9,801	9·950	970,299	4·626
80	6,400	8·944	512,000	4·309	100	10,000	10·000	1000,000	4·642

"P. H. டாஸ் (Daus), W. M. ஒய் பர்ன்" (whyburn), இரு ஆசிரியர்களும் எழுதிய "கணிதப் பகுப்பாய்வின் அறிமுகம் (பொருளாதார பிரச்சினைகளின் பயன்கள் உட்பட)" நூலிலிருந்து இந்த 1-5 அட்டவணைகள் "அடிஸன்—வெஸ்லி" பதிப்பாளர்களின் அனுமதியுடன் எழுதப்படுகிறது. (அட்டவணைகள் 1 முதல் 5 முடிய).

அட்டவணை - 2

வர்க்கங்கள்

(நான்கு பொருளுடை இலக்கங்களுக்கு)

(எதிர்மாறு இடைச்செருகல் (inverse interpolation) மூலம் வர்க்க மூலம் காணலாம்)

N	·00	·01	·02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	·09
1·0	1·000	1·020	1·040	1·061	1·082	1·102	1·124	1·145	1·166	1·188
1·1	1·210	1·232	1·254	1·277	1·300	1·322	1·346	1·369	1·392	1·416
1·2	1·440	1·464	1·488	1·513	1·538	1·562	1·588	1·613	1·638	1·664
1·3	1·690	1·716	1·742	1·769	1·796	1·822	1·850	1·877	1·904	1·932
1·4	1·960	1·988	2·016	2·045	2·074	2·102	2·132	2·161	2·190	2·220
1·5	1·250	2·280	2·310	2·341	2·372	2·402	2·434	2·465	2·496	2·528
1·6	2·560	2·592	2·624	2·657	2·690	2·722	2·756	2·789	2·822	2·856
1·7	2·890	2·924	2·958	2.993	3·028	3·062	3·098	3·133	3·168	3·204
1·8	3·240	3·276	3·312	3·349	3·386	3·422	3·460	3·497	3·534	3·572
1·9	3·610	3·648	3·686	3·725	3·764	3·802	3·842	3·881	3·920	3·960
2·0	4·000	4·040	4·080	4·121	4·162	4·202	4·244	4·285	4·326	4·368

N	·00	·01	·02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	·09
2·1	4·410	4·452	4·494	4·537	4·580	4·622	4·666	4·709	4·752	4·796
2·2	4·840	4·884	4·928	4·973	5·018	5·062	5·108	5·153	5·198	5·244
2·3	5·290	5·336	5·382	5·429	5·476	5·522	5·570	5·617	5·664	5·712
2·4	5·760	5·808	5·856	5·905	5·954	6·002	6·052	6·101	6·150	6·200
2·5	6·250	6·300	6·350	6·401	6·452	6·502	6·554	6·605	6·656	6·708
2·6	6·760	6·812	6·864	6·917	6·970	7·022	7·076	7·129	7·182	7·236
2·7	7·290	7·344	7·398	7·453	7·508	7·562	7·618	7·673	7·728	7·784
2·8	7·840	7·896	7·952	8·009	8·066	8·122	8·180	8·237	8·294	8·352
2·9	8·410	8·468	8·526	5·585	8·644	8·702	8·762	8·821	8·880	8·940
3·0	9·000	9.060	9·120	9·181	9·242	9·302	9·364	9·425	9·486	9·458
3·1	9·610	9·672	9·734	9·797	9·860	9·922	9·986	10·05	10·11	10·18
3·2	10·24	10·30	10·37	10·43	10·50	10·56	10·63	10·69	10·76	10·82
3·3	10·89	10·96	11·02	11·09	11·16	11·22	11·29	11·36	11·42	11·49
3·4	11·56	11·63	11·70	11·76	11·83	11·90	11·97	12·04	12·11	12·18
3·5	12·25	12·32	12·39	12·46	12·53	12·60	12·67	12·74	12·82	12·89
3·6	12·96	13·03	13·10	13·18	13·25	13·32	13·40	13·47	13·54	18·62
3·7	13·69	13·76	13·84	13·91	13·99	14·06	14·14	74·21	14·29	14·36
3·8	14·44	14·52	14·59	14·67	14·75	14·82	14·90	14·98	15·05	15·13
3·9	15·21	15·29	15·37	15·44	14·52	15·60	15·68	15·76	15·84	15·92
4·0	16·00	16·08	16·16	16·24	16·32	16·40	16·48	16·56	16·65	16·73

N	·00	·01	·02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	·09
4·1	16·81	16·89	16·97	17·06	17·14	17·22	17·31	17·39	17·47	17·56
4·2	17·64	17·72	17·81	17·89	17·98	18·06	18·15	18·23	18·32	18·40
4·3	18·49	18·58	18·66	18·75	18·84	18·92	19·01	19·10	19·18	19·27
4·4	19·36	19·45	19·54	19·62	19·71	19·80	19·89	19·98	20·07	20·16
4·5	20·25	20·34	20·43	20·52	20·61	20·70	20·79	20·88	20·98	21·07
4·6	21·16	21·25	21·34	21·44	21·53	21·62	21·72	21·81	21·90	22·00
4·7	22·09	22·18	22·28	22·37	22·47	22·56	22·66	22·75	22·85	22·94
4·8	23·04	23·14	23·23	23·33	23·43	23·52	23·62	23·72	23·81	23·91
4·9	24·01	24·11	24·21	24·30	24·40	24·50	24·60	24·70	24·80	24·90
5·0	25·00	25·10	25·20	25·30	25·40	25·50	25·60	25·70	25·81	25·91
5·1	26·01	26·11	26·21	26·32	26·42	26·52	26·63	26·73	26·83	26·94
5·2	27·04	27·14	27·25	27·35	27·46	27·56	27·67	27·77	27·88	27·98
5·3	28·09	28·20	28·30	28·41	28·52	28·62	28·73	28·84	28·94	29·05
5·4	29·16	29·27	29·38	29·48	29·59	29·70	29·81	29·92	30·03	30·14
5·5	30·25	30·36	30·47	30·58	30·69	30·80	30·91	31·02	31·14	31·25
5·6	31·36	31·47	31·58	31·70	31·81	31·92	32·04	32·15	32·26	32·38
5·7	32·49	32·60	32·72	32·83	32·95	33·06	33·18	33·29	33·41	33·52
5·8	33·64	33·76	33·87	33·99	34·11	34·22	34·34	34·46	34·57	34·69
5·9	34·81	34·93	35·05	35·16	35·28	35·40	35·52	35·64	35·76	35·88
6·0	36·00	36·12	36·24	36·36	36 48	36·60	36·72	36·84	36·97	37·09

N	·00	·01	·02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	·09
6·1	37·21	37·33	37·45	37·58	37·70	37·82	37·95	38·07	38·19	38·32
6·2	38·44	38·56	38·69	38·81	38·94	39·06	39·19	39·31	39·44	39·56
6·3	39·69	39·82	39·94	40·07	40·20	40·32	40·45	40·58	40·70	40·83
6·4	40·96	41·09	41·22	41·34	41·47	41·60	41·73	41·86	41·99	42·12
6·5	42·25	42·38	42·51	42·64	42·77	4_·90	43·03	43·16	43·30	43·43
6·6	43·56	43·69	43·82	43·96	44·09	44·22	44·36	44·49	44·62	44·76
6 7	44·89	45·02	45·16	45·29	45·43	44 56	45·70	45·83	45·97	46·10
6·8	46·24	46·38	46·51	46·65	46·79	46·92	47·06	47·20	47·33	47·47
6·9	47·61	47·75	47·89	48·02	48·16	48·30	48·44	48·58	48·72	48·86
7·0	49·00	49·14	49·28	49·42	49·56	49·70	49·84	49·98	50·13	50·27
7·1	50·41	50·55	50·69	50·84	50·98	51·12	51·27	51·41	51·55	51·70
7 2	51·84	51·98	52·13	52·27	52·42	52·56	52·71	52·85	53·00	53·14
7·3	53·29	53·44	53·58	53·73	53·88	54·02	54·17	54·32	54·46	64·61
7·4	54·76	54·91	55·06	55·20	55·35	55·50	55·65	55·80	55·95	56·10
7·5	56·25	56·40	56·55	56·70	56·85	57·00	57·15	57·30	57·46	57·61
7·6	57·76	57·91	58·06	58·22	58·37	58·52	58·68	58·83	58·98	59·14
7·7	59·29	59·44	59·60	59·75	59·91	60·06	60·22	60·37	60·53	60·68
7 8	60·84	61·00	61·15	61·31	61·47	61·62	61·78	61·94	62·09	62·25
7·9	62·41	62·57	62·73	682·8	63·04	63·20	63·36	63·52	63·68	63·84
8 0	64·00	64·16	64·32	64·48	64·64	64·80	64·96	65·12	65·29	65·45

N	·00	·01	·02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	09·
8·1	65·61	65·77	65·93	66·10	66·26	66·42	66·59	66·75	66·91	67·08
8·2	67·24	67·40	67·57	67·73	67·90	68·06	68·23	68·39	68·56	68·72
8·3	68·89	69·06	69·22	69·39	69·56	69·72	69·89	70·06	70·22	70·39
8·4	70·56	70·73	70·90	71·06	71·23	71·40	71·57	71·74	71·91	72·08
8·5	72·25	72·42	72·59	72·76	72·93	73·10	73·27	73·44	73·62	73·79
8·6	73·96	74·13	74·30	74·48	74·65	74·82	75·00	75·17	75·34	75·52
8·7	75·69	75·86	76·04	76·21	76·39	76·56	76·74	76·91	77·09	77·26
8·8	77·44	77·62	77·79	77·97	78·15	78·32	78·50	78·68	78·85	79·03
8·9	79·21	79·39	79·57	79·74	79·92	80·10	80·28	80·46	80·64	80·82
9·0	81·00	81·18	81·36	81·54	81·72	81·90	82·08	82·26	12·45	82·63
9·1	82·81	82·99	83·17	83·36	83·54	83·72	83·91	84·09	84·27	84·46
9·2	84·64	84·82	85·01	85·19	85·38	85·56	85·75	85·93	86·12	86·30
9·3	86·49	86·68	86·86	87·05	87·24	87·42	87·61	87·80	87·98	88·17
9·4	88·36	88·55	88·74	88·92	89·11	89·30	89·49	89·68	89·87	90·06
9·5	90·25	90·44	90·63	90·82	91·01	91·20	91·39	91·58	91·78	91·97
9·6	92·16	92·35	92·54	92·74	92·93	93·12	93·32	93·51	93·70	93·90
9·7	94·09	94·28	94·48	94·67	94·87	95·06	95·26	95·45	95·65	95·84
9·8	96·04	96·24	96·43	96·63	96:83	97·02	97·22	97·42	97·61	97·81
9·9	98·01	98·21	98·41	98·60	98·80	99·00	99·20	99·40	99·60	99·80
N	·00	01	·02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	·09

அட்டவணை - 3

எண்களின் பொது மடக்கைகள்

(Common logarithms)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0000	3010	4771	6021	6990	7782	8451	9031	9542
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	6798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2984
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201

அட்டவணை - 3 – (தொடர்ச்சி)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	3298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4457
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5885	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6253	6160	6770	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6149	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	5699	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067

அட்டவணை - 3 – (தொடர்ச்சி)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8689
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8799	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079

அட்டவணை - 3 — (தொடர்ச்சி)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
81	9085	9090	9096	2101	9106	9112	9117	9122	2128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039

அட்டவணை - 4

இயற்கை மடக்கைகள்

(Natural Logarithms)

	·00	·01	·02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	·09
1·0	0·0000	0·0100	0·0198	0·0296	·0392	·0488	·0583	0·0677	·0770	·0862
1·1	·0953	1044	1133	1222	1310	1398	·1484	1570	1655	1740
1·2	·1823	1906	1989	2070	2151	2231	2311	2390	2469	2546
1·3	·2624	2700	2776	2852	2927	3001	3075	3148	3221	3293
1·4	·3365	3436	3507	3577	3646	3716	3784	3853	3920	3988
1·5	·4055	4121	4187	4253	4318	4383	4447	4511	4574	4637
1·6	4700	4762	4824	4886	4947	5008	5068	5128	5188	5247
1·7	5306	5365	5423	5481	5539	5596	5653	5710	5766	5822
1·8	5878	5933	5988	6043	6098	6152	6206	6259	6313	6366
1·9	6419	6471	6523	6575	6627	6678	6729	6780	6831	6881
2·0	6931	6981	7031	7080	7129	7178	7227	7275	7324	7372
2·1	7419	7467	7514	7561	7608	7655	7701	7747	7793	7839
2·2	7885	7930	7975	8020	8065	8109	8154	8198	8242	8286
2·3	8329	8372	8416	8459	8502	8544	8587	8629	8671	8713
2·4	8755	8796	8838	8879	8920	8961	9002	9042	9083	9123

	·00	·01	·02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	·09
2·5	9163	9203	9243	9282	9322	9361	9400	9439	9478	9517
2·6	9555	9594	0·9632	·9670	0·9708	0·8746	9783	0·9821	0·9858	0·9895
2·7	0·9933	0·9969	1·0006	1·0043	1·0080	1·0116	1·0152	1·0188	1·0225	1·0260
2·8	1·0296	1·0332	·0367	·0403	·0438	0473	·0508	1·0543	·0578	0613
2·9	·0647	·0682	·0716	0750	·0784	0818	0852	1·0886	·0919	0953
3·0	0986	1019	1053	1086	1119	1151	1184	1217	1249	1282
3·1	1314	1346	1378	1410	1442	1474	1506	1537	1569	1600
3·2	1632	1663	1694	1725	1756	1787	1817	1848	1878	1909
3·3	1939	1969	2000	2030	2060	2090	2119	2149	2179	2208
3·4	2238	2267	2296	2326	2355	2384	2413	2442	2470	2499
3·5	2528	2556	2585	2613	2641	2669	2698	2726	2754	2782
3·6	2809	2837	2865	2892	2920	2947	2975	3002	3029	3056
3·7	3083	3110	3137	3164	3191	3318	3244	3271	3297	3324
3·8	3350	3376	3403	3429	3455	3481	3507	3533	3558	3584
3·9	3610	3635	3661	3686	3712	3737	3762	3788	3813	3838
4·0	3863	3888	3913	3938	3962	3987	4012	4036	4061	4085
4·1	4110	4134	4159	4183	4207	4231	4255	4279	4303	4327
4·2	4351	4375	4398	4422	4446	4469	4493	4516	4540	4563
4·3	4586	4609	4633	4656	4679	4702	4725	4748	4770	4793
4·4	4816	4839	4861	4884	4907	4929	4951	4974	4996	5019

	·00	·01	·02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	·09
4·5	5041	5063	5085	5107	5129	5151	5173	5195	5217	5239
4·6	5261	5282	5304	5326	5347	5369	5390	5412	5433	5454
4·7	5476	5497	5518	5539	5560	5581	5602	5623	5644	5665
4·8	5686	5707	5128	5748	5769	5780	5810	5831	5851	5872
4·9	5892	5913	5933	5953	5974	5794	6014	6034	6054	6074
5·0	6094	6114	6134	6154	6174	6194	6214	6233	6253	6273
5·1	6292	6312	6332	6351	6371	6390	6409	6429	6448	6467
5·2	6487	6506	6525	6544	6563	6582	6601	6620	6639	6658
5·3	6677	6696	6715	6734	6752	6771	6709	6808	6827	6845
5·4	1·6864	1·6882	1·6901	1·6919	1·6938	1·6956	1·6974	1·6993	1·7011	1·7029
5·5	1·7047	1·7066	1·7084	1·7102	1·7120	1·7138	1·7156	1·7174	1·7192	1·7210
5·6	7228	7246	7263	7281	7299	7317	7334	7352	7370	7887
5·7	7405	7422	7440	7457	7475	7492	7509	7527	7544	7561
5·8	7579	7596	7613	7630	7647	7664	7681	7699	7716	7733
5·9	7750	7766	7783	7800	7817	7843	7851	7867	7884	7901
6·0	7918	7934	7951	7967	7984	8001	8017	8034	8050	8066
6·1	8 83	8099	8116	8132	8148	8165	8181	819	8213	8229
6·2	245	8262	8278	8 94	8310	8326	8342	8358	8374	8390
6·3	8405	8421	8437	8453	8469	8485	8500	8516	8532	8547
6·4	8563	8579	8594	8610	8625	8641	8656	8672	8587	8703

	·00	·01	·02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	0.9
6·5	8718	8733	8749	8764	8779	8795	8810	8825	8840	8856
6·6	8871	8886	8901	8916	8931	8946	8961	8976	8991	9006
6·7	9021	9036	9051	9066	9081	9095	9110	9125	9140	9155
6·8	9169	9184	9199	9213	9228	9242	9257	9272	9286	9301
6·9	9315	9330	9344	9359	9373	9387	9402	9416	9430	9445
7·0	9459	9473	9488	9502	9516	9530	9544	9559	9573	9587
7·1	9601	9615	9629	9643	9657	9671	9685	9699	9713	9727
7·2	9741	9755	9769	9782	9796	9810	9824	9838	9851	1·9865
7·3	1·9879	1·9892	1·9906	1·9920	1·9933	1·9947	1·9961	1·9974	1·9988	2·0001
7·4	2·0015	2·0028	2·0042	2·0055	2·0069	2·0082	2·0096	2·0109	2·0122	·0136
7·5	0149	0162	0176	·0189	0202	0215	0229	0242	0255	0268
7·6	0281	0295	0308	·0321	0334	0347	0360	0373	0386	0399
7·7	0412	0425	0438	·0451	0464	0477	0490	0503	0516	0528
7·8	0541	0554	0567	·0580	0592	0605	0618	0631	0643	0656
7·9	0669	0681	0694	·0707	0719	0732	0744	0757	0769	0782
8·0	0794	0807	0819	0832	0844	0857	0869	0882	0894	0906
8·1	0919	0931	0943	0956	0968	0980	0992	1005	1017	1029
8·2	1041	1054	1066	1078	1090	1102	1114	1126	1138	1150
8·3	1163	1175	1187	1199	1211	1223	1235	1247	1258	1270
8·4	1282	1294	1306	1318	1330	1342	1353	1365	1377	1389

	·00	·01	·02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	·09
8·5	1401	1412	1424	1436	1448	1459	1471	1483	1494	1506
8·6	1518	1529	1541	1552	1564	1576	1587	1599	1610	1622
8·7	1633	1645	1656	1668	1679	1691	1702	1713	1725	1736
8·8	1748	1759	1770	1782	1793	1804	1815	1827	1838	1849
8·9	1861	1872	1883	1894	1905	1917	1928	1939	1950	1961
9·0	1972	1983	1994	2006	2017	2028	2039	2050	2061	1566
9·1	2083	2094	2105	2116	2121	2138	2148	2159	2170	1622
9·2	2192	2203	2214	2225	2235	2246	2257	2268	2279	1736
9·3	2300	2311	2322	2332	2343	2354	2364	2375	2336	1849
9·4	2407	2418	2428	2439	2450	2460	2471	2481	2492	1961
9·5	2513	2523	2534	2544	2555	2565	2576	2586	2597	2607
9·6	2618	2628	2638	2649	2659	2670	2680	2690	2701	2711
9·7	2721	2732	2742	2752	2762	2773	2783	2793	2803	2814
9·8	2824	2834	2844	2854	2865	2875	2885	2895	2905	2915
9·9	2·2925	2·2935	2·2946	2·2956	2·2966	2·2976	2·2986	2·2996	2·3006	2·3016
10·0	2·3026									

அட்டவணை - 5

அடுக்குக் குறிச் சார்பலன்கள்

(Exponential Functions)

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
·00	1·0000	1·0000	2·5	12·182	·0821
·05	1·0513	·9512	2·6	13·464	·0743
·10	1·1052	·9048	2·7	14·880	·0672
·15	1·1618	·8607	2·8	16·445	0·608
·20	1·2214	·8187	2·9	18·174	·0550
·25	1·2840	·7788	3·0	20·086	·0498
·30	1·3499	·7408	3·1	22·198	·0450
·35	1·4191	.7047	3·2	24·533	·0408
·40	1·4918	·6703	3·3	27·113	·0369
·45	1·5683	·6376	3·4	29·964	·0334
·50	1·6487	·6065	3·5	33·115	·0302
·55	1·7333	·5769	3·6	36·598	·0247
·60	1·8221	·5488	3·7	40·447	·0247
·65	1·9155	·5220	3·8	44·701	·0224
·70	1·0138	·4966	3·9	49·402	·0202
·75	2·1170	·4724	4·0	54·598	·0183
·80	2·2255	·4493	4·1	60·340	·0166
·85	2·3396	·4274	4·2	66·386	·0150
·90	2·4596	·4066	4·4	73·700	·0136
·95	2·5857	·3867	4·4	81·451	·0123

அட்டவணை - 5 (தொடர்ச்சி)

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
1·0	2·7183	·3679	4·5	90·017	·0111
1·1	3·0042	·3329	4·6	99·484	·0101
1·2	3·3201	·3012	4·7	109·95	·0091
1·3	3.6693	·2725	4·8	121·51	·0082
1·4	4·0552	·2466	4·9	134·29	·0074
1·5	4·4817	·2231	5	148·41	·0067
1·6	4·9530	·2019	6	403·43	·0025
1·7	5·4739	·1827	7	1096·6	·0009
1·8	6·0496	·1653	8	2981·0	·1003
1·9	6·6859	·1496	9	8103·1	·0001
2·0	7·3891	·1353	10	22026·	·0000
2·1	8·1662	·1225			
2·2	9·0250	·1108			
2·3	0·9742	·1003			
2·4	11·023	·0907			

பார்வைக்குரிய நூல்கள்

(BOOKS FOR REFERENCE)

1. R. G. D. ALLEN,
   —Mathematical Analysis for Economists, London, Macmillan & Co., Ltd., 1962.

2. P. G. DAUS & W. M. WHYBURN,
   —Introduction to Mathematical Analysis with applications to problems of Economics. Addison - Wesley Publ. Co. Inc. U.S.A. (1958.)

3. M. HALAYYA,
   —Elements of Economics Manaktalas, Bombay (1965)

4. HENDERSON & QUANDT,
   —Micro Economic Theory, a mathematical approch. Mc. Graw Hill Co., Inc., (1958).

5. A. KOORAS,
   — Elements of Mathematical Economics Houghton, Mifflin Company, Boston, U.S.A. (1965).

6. ALFRED MARSHALL,
   — Principles of Economics, London (1920).

7. JOHN. ROBINSON,
   — Economics of Imperfect Competition London (1933).

8. P. A. SAMVELSON,
— Foundations of Economic Analysis,
Cambridge, Mass., Haruard Univ. Press (1947).

9. A. W. STONIER & D. C. HAGUE,
— A Text Book of Economic Theory,
Longmans Green & Co., Ltd., (1962).

10. G. TINTNER.
— Mathematics and Statistics for Economists,
Rinehart & Co., Inc., (1953).

11. IARO YAMANE,
— Mathematics for Economists — an elementary survey,
Prentice Hall of India (P) Ltd.,
New Delni (1965).

கலைச் சொற்கள்

கணிதம்

Absolute	—	தனி
Acre	—	ஏக்கர்
Algebra	—	இயற்கணிதம்
Analysis	—	பகுப்பாய்வு
Angle	—	கோணம்
Annuity	—	ஆண்டுத் தொகை
Approximation	—	தோராயம்
Axes	—	அச்சுக்கள்
Bound	—	வரம்பு
Calculus	—	நுண்கணிதம்
Classification	—	பாகுபாடு
Coefficient	—	குணகம், கெழு
Combination	—	சேர்க்கை ; தொகுப்பு; சேர்மானம்.
Comman logarithm	—	பொது மடக்கை
Compare	—	ஒப்பிடு
Compound	—	கூட்டு
Concave	—	குழிவான
Concentric circles	—	ஒரு மைய வட்டங்கள்
Condition	—	நிபந்தனை
Condition necessary	—	தேவையான
Condition sufficient	—	போதுமான
Consecutive	—	அடுத்தடுத்துவரும்
Consistency	—	பொருத்தமுடைமை, இசைவு.
Constant	—	மாறாத. மாறிலி, நிலையெண்.
Constraint	—	நிபந்தனை, கட்டுப்பாடு
Continuity	—	தொடர்ச்சி
Continuous	—	தொடர்ச்சியான
Contaur	—	உருவரை
Contradiction	—	எதிர் மறுப்பு

Conversely — மறுதலையாக
Convex — குவிந்த
Convexity — குவிவு
Cross — குறுக்கு
Curvature — வளைவு
Curve — வளைவு, வளைகோடு
Decrease — குறைதல்
Decreasing function — குறையும் சார்பு, குறையும் சார்பலன்.
Definition — வரையறை
Degree — பாகை ; படி.
Density — அடர்த்தி
Dependent — சார்ந்த
Derivative — வகைக் கெழு
Describe — வரை, விளக்கி கூறு.
Diagram — விளக்கப்படம்
Differential — வேறுபாடு, வகையீடு.
Differential coefficient — வகையீட்டு கெழு; வகைக் கெழு.
Differentiation — வகையிடல், வகையீடல்.
Differentiation logarithm — மடக்கை வகையீடு
Differentiation partical — பகுதி வகையீடு
Discontinous — தொடர்ச்சியற்ற, தனி.
Efficiency — பயில் திறன்
Elastic — நெகிழ்ச்சியான
Elasticity — நெகிழ்ச்சி
Eliminate — நீக்குதல்
Equal — சமம்
Equation — சமன்பாடு
Equilibrium — சமநிலை
Evaluate — மதிப்பிடு
Exercise — பயிற்சி
Expectation — எதிர்பார்த்தல்
Exparential function — அடுக்குக்குறி சார்பலன்
Extend — நீட்டுதல்
Factor — காரணி
Finite — முடிவுள்ள
Form — வடிவம், உருவம்.
Fraction — பின்னம்
Function — சார்பு, சார்பலன்.

Function continuous	—	தொடர்புடைச் சார்பு
Function Decreasing	—	குறையுஞ் சார்பலன்
Function exparential	—	அடுக்கு குறி சார்பலன்
Function homogeneous	—	ஓரினச் சார்பு
Function livear	—	நேர்கோட்டு சார்பு ஒருபடி சார்பு
Function implicit	—	உட்படு சார்பு
Function explicit	—	வெளிப்படை சார்பு
Geometrical	—	வடிவ கணிதத்திற்குரிய
Gradient	—	சாய்வு வீதம், சரிவு.
Gradient of the tangent	—	தொடுகோட்டின் சரிவு
Horizantal	—	கிடைநிலை
Hyperpola	—	அதிபரவளைவு
Identity	—	முற்றொருமை
Increase	—	ஏற்றம். அதிகரித்தல்.
Increment	—	அதிகரிப்பு
Inelastic	—	நெகிழ்ச்சியற்ற
Inequality	—	சமனிலி, சமனின்மை.
Integration	—	தொகையீடு ; தொகையிடல்
Interval	—	இடைவெளி
Joint	—	இணைப்பு ; இணைந்த.
Law	—	நியதி, விதி.
Limit	—	எல்லை
Linear	—	நேர்கோட்டு, ஒருபடித்தான.
Logarithm	—	மடக்கை
Mathematics	—	கணிதம்
Mathematical Economics	—	கணிதப் பொருளாதாரம்
Maximum	—	உச்ச, மீப்பெரு அளவு.
Minimum	—	மீச்சிறு ; சிறும எதிர்மறை, எதிர்.
Minus (—)	—	(கழித்தல் குறி) கணிய
Negative	—	எதிர்மறை
Net	—	நிகர
Normal	—	இயல்பான, இயல்நிலை.
Origin	—	ஆதி ; ஆரம்பம்.
Parabola	—	படிவளைவு
Partial	—	பகுதி
Percent	—	சதவீதம்
Perfect	—	நிறைவான
Point	—	புள்ளி

Plus (+) — கூட்டல் குறி
Power series — அடுக்குத் தொடர்
Price relative — விலை விகிதம்
Proportion — விகிதாசாரம்
Quotient — ஈவு
Rate — வீதம்
Ratio — விகிதம்
Real — மெய்யான
Root — மூலம்
Scale — அளவுகோல் ; அளவு திட்டம்.
Series — தொடர்
Sign — குறி
Signal — அடையாளம்
Size — பருமன் ; அளவு.
Surface — மேற்பரப்பு
Symmetric — சமச்சீர்
Symetical — சமச்சீரான
Table — அட்டவணை ; பட்டியல்.
Test — சோதனை
Uniform — ஒரே சீரான
Unit — அலகு
Value — மதிப்பு
Variable — மாறி
Zero — பூஜ்யம்

பொருளாதாரம்

Amount — அளவு, தொகை.
Analysis, economic — பொருளாதாரப் பகுத்தாய்வு
Annuity — ஆண்டுத் தொகை
Approximate value — தோராய மதிப்பு, சுமாரான மதிப்பு.
Assumption — எடுகோள்
Asymptote — அணுகுகோடு
Average fixed cost — சராசரி நிலைச் செலவு, மாறாச் செலவு.
Average Revenue — சராசரி வருவாய்
Bank — பாங்கு, வங்கி
Bonus — வெகுமதி

Budget constraint — வரவு-செலவுத் திட்டக் கட்டுப்பாடு
Business firm — தொழில் நிறுவனம்
Byproducts — பக்க விளைவுகள்
Capital — முதல், மூலதனம்.
Capital Goods — முதற் கருவிப் பொருள்கள்
Capital value — முதல் மதிப்பு
Characteristics — இயல்புகள்
Choice — விருப்பேற்பு
Coefficient — கெழு
Combination — சேர்மானம், தொகுதி, கூட்டு.
Complementary — நிரப்புத் தொடர்பு
Competitive — போட்டியிடும்
Competitor — போட்டியாளர்
Commoditic — பண்டங்கள், பொருட்கள்.
Competition — போட்டி
Competition perfeet — நிறைவுப் போட்டி
Competition inperfect — நிறைவு குன்றிய போட்டி
Composite demand — தொகுப்புத் தேவை, பன்முக தேவை.
Compensating variation — நிரப்புமாற்றம், ஈடுசெய் மாறுதல்
Complementary goods — நிறைவுசெய் பொருட்கள்
Concept — தத்துவம்
Concentric circles, arc of conjectural variations — ஒரு மைய வட்டங்களின் வில்கள் ஊகித்த மாறுபாடுகள்
Constant — மாறிலி, நிலையான.
Constant cost — நிலையான செலவு
Consumer — துய்ப்போர், நுகர்வோர்.
Consumption — நுகர்வு, துய்ப்பு.
Consumers goods / Consumption goods — துய்ப்புப் பொருள்கள்
Consumers surplus — நுகர்வோர் உபரி
Consumption — நுகர்ச்சி, நுகர்வு, துய்ப்பு.
Constent Returns, Law of — மாறு விளைவு விதி, நிலையான விளைவு விதி.
Co-ordinates — ஆயத் தொலைகள்
Cost — செலவு, உற்பத்திச் செலவு.
Cost, average — சராசரிச் செலவு
Cost, real — உண்மைச் செலவு

Cost, marginal	—	இறுதிநிலைச் செலவு, விளிம்புச் செலவு.
Cost, overhead	—	பொதுச் செலவு, பொதுநிலைச் செலவு.
Cost, fixed	—	மாறுச் செலவுகள்
Cost, variable	—	மாறுஞ் செலவுகள்
Cost, average variable	—	சராசரி மாறுந் தன்மையச் செலவு
Cost, total	—	மொத்தச் செலவு, செலவு.
Cost. production	—	உற்பத்திச் செலவு, ஆக்கற் செலவு.
Cost price	—	அடக்கவிலை
Curve	—	வளைகோடு, வளைவு.
Customer	—	வாடிக்கைக்காரர்
Data	—	புள்ளி விவரங்கள்
Decision at the margin	—	விளிம்பில் எடுக்கப்படும் முடிவு கள்
Definition	—	வரையறை
Demand	—	தேவை
Demand curve	—	தேவை வளைகோடு
Demand price	—	தேவை விலை
Demand elasticity	—	தேவையின் நெகிழ்ச்சி
Demand joint	—	கூட்டுத் தேவை
Demand laws	—	தேவை விதிகள்
Diagram	—	விளக்கப்படம்
Diminishing returns, law of	—	குறைந்து செல், விளைவு விதி
Diminishing utility, law of	—	குறைந்து செல் பயன் விதி
Discriminating monopoly	—	பேதங்காட்டும் விற்பனைச் சர் வாதீனம் ; பேதங்காட்டும் விற்பனை முற்றுரிமை.
Distribution functional	—	தொழில் வாரிப் பங்கீடு
Division of labour	—	உழைப்பு வேலைப் பிரிப்பு
Duopoly	—	இரட்டைச் சர்வாதீனம்
Economics	—	பொருளாதாரம்
Economics mathematical	—	கணிதப் பொருளாதாரம்
Economic rationality	—	பொருளாதாரப் பகுத்தறி வுடைமை
Econometrics	—	அளவியல் பொருளாதாரம்
Economy	—	சிக்கனம்
Effort	—	முயற்சி

Effect — விளைவு
Elasticity — நெகிழ்ச்சி
Elasticity of demand — தேவை நெகிழ்ச்சி
Elasticity of cost — செலவின் நெகிழ்ச்சி
Elasticity of cross — குறுக்கு நெகிழ்ச்சி
Elasticity of partial — பகுதி நெகிழ்ச்சி
Elasticity of production — உற்பத்தித் திறன் நெகிழ்ச்சி
Elasticity of substitution — பதிலீட்டு நெகிழ்ச்சி
Employee — வேலையாள், பணியாள்
Employment, full — நிறைவுடை வேலை வாய்ப்பு
Enterprise — தொழிற்றுணிவு
Equilibrium — சமநிலை
Equilibrium optimum — மிக உகந்த (சாலச் சிறந்த) சமநிலை
Equilibrium, market — சந்தைச் சமநிலை, அங்காடிச் சமநிலை
Equilibrium price — சமநிலை விலை
Equilibrium (short period) — குறுங்காலச் சமநிலை
Equilibrium (long period) — நீள் காலச் சமநிலை
Equality — சமத்துவம்
Equation — சமன்பாடு
Evaluate — மதிப்பீடு
Expenditure — செலவீடு, செலவு.
Factors of production — உற்பத்திக் காரணிகள்
Farm — பண்ணை
Final products — முழுமைப் பொருட்கள்
Firm — நிறுவனம்
Finite — முடிவுடைய
Fixed — மாறா, நிலைத்த.
Formula — வாய்பாடு. சூத்திரம்.
Function — சார்பு, சார்பலன்.
Function exponential — அடுக்குக் குறிச் சமன்பாடு
General equilibrium — பொதுச் சமநிலை
Goods — பொருட்கள், பண்டங்கள்.
Graph — வரைபடம்
Habit — பழக்கம்
Homogeneous function — ஓரினச் சார்பு
Horizontal axis — படுகிடை அச்சு, கிடை அச்சு.
Hotelling's Example — ஹோட்டலிங்கின் எடுத்துக் காட்டு

Hours of work	—	உழைப்பு நேரம்
Hypothesis	—	கருதுகோள், எடுகோள்.
Hyperbole	—	அதிபரவளைவு
Identical	—	முற்றொருமையான
Imperfect Competition	—	நிறைகுறைப் போட்டி
Income	—	வருமானம்
Income effect	—	வருமான விளைவு
Income-consumption curve	—	வருவாய்-நுகர்ச்சி வளைகோடு
Increasing returns	—	வளர்ந்து செல் விளைவு
Indifference curves	—	சமநோக்கு வளைகோடுகள்
Industry	—	தொழிற்சாலை
Inferior Goods	—	கீழ்தரப் பண்டங்கள் மட்டரகப் பண்டங்கள்
Interest, compound	—	கூட்டுவட்டி
Intersection	—	வெட்டுதல்
Investment	—	முதலீடு
Investment marginal	—	விளிம்பு முதலீடு
Investors	—	முதலீடு செய்வோர்
Joint prouduction	—	இணைப்பு உற்பத்தி
Joint demand	—	கூட்டுத்தேவை, இணைப்புத் தேவை.
Labour	—	உழைப்பு
Lagrange Multiplier	—	இலக்ராஞ்சின் பெருக்கு எண்
Land	—	நிலம்
Law of Diminishing utility	—	குறைந்துசெல் பயன்விதி
Limitations	—	நிபந்தனைகள், கட்டுப்பாடுகள்.
Linear, homogeneous	—	நேர்கோட்டு ஒருபடித்தான
Logarithmic differentiation	—	மடக்கை வகையீடு
Loss Leader	—	இழப்புத்தன்மை, இழப்பு வழி காட்டி.
Machinery	—	பொறி
Macro-economics	—	பருவினப் பொருளாதாரம்
Margin	—	விளிம்பு, இறுதிநிலை.
Marginal return	—	விளிம்பு விளைவு
Marginal utility	—	இறுதிநிலை விளைவு விளிம்புப் பயன்பாடு
Marginal cost	—	விளிம்பு விலை
Marginal product	—	இறுதிநிலை உற்பத்தி
Marginal proddutivity	—	இறுதிநிலை உற்பத்தித்திறன்
Marginal revenue	—	விளிம்பு வருவாய்

Marginal purchese, intra — உள்விளிம்பு வாங்கற்பாடு
Marginal purchese, extra — புறவிளிம்பு வாங்கற்பாடு
Market equlibrium — சந்தைச் சமநிலை
Market rate — சந்தை வீதம். அங்காடி வீதம்.
Maximum — மீப்பெரு. உச்ச.
Maximisation, profit — இலாப உச்சப்பாடு அடைதல்
Maximum satisfaction — உச்ச நிறைவு
Measure — அளவை, அளவுகோல்.
Micro economics — நுண்ணினப் பொருளாதாரம்
Money — பணம்
Meney income — பண வருமானம்
Monopoly — விற்பனைச் சர்வாதீனம், முற்றுரிமை.
Monpoly price — சர்வாதீனவிலை
Monopoly revenue — சர்வாதீன வருவாய்
Monopoly — வாங்கற் சர்வாதீனம்
Monotonic decreasing function — ஒரேமுறை இறங்கும் சார்பலன்
Monotonic incraesing function — ஒரேமுறை ஏறும் சார்பலன்
Multiplier — பெருக்கி, பெருக்கு எண்
Nationalisation — பொதுவுடைமையாக்கல்
Negalive Stope — எதிர்மறைச் சரிவு, எதிர்க் கணிய சரிவு
Net revenue — நிகர வருவாய்
Normal — இயல்பான
Normal economic situation — இயல்பான பொருளதார நிலைமை
Normative science — தரஞ்சூழ் அறிவியல்
Occupation — தொழில்
One-to-one Correspondence — ஒன்றுக்கொன்று ஒத்தியைபு
Origin — ஆதி, ஆரம்பம்.
Output — உற்பத்தி. ஆக்கம்.
Parabola — பரவளைவு
Parameter — பண்பளவு
Paradox — முரணுரை
Positive Science — இயல்புரை
Positive constant — நேர்நிலை எண்
Preference scale of — விருப்பத் தரக்கோல்
Price slope — விலைச்சரிவு

Price effect — விலையின் பயன். விலையின் விளைவு.
Principal — மூலதனம், அசல்.
Producer's goods — உற்பத்தியாளர்களின் பண்டங்கள்
Proof — சான்று, நிரூபணம்.
Proportion — விகிதாசாரம்
Product — உற்பத்தி
Production, cost of — ஆக்குஞ் செலவு
Production curve — உற்பத்தி விளைவு
Purchasing power — வாங்கும் திறன்
Raw materials — கச்சாப் பொருட்கள், மூலப் பொருட்கள்.
Reaction — எதிர்விளைவு, எதிர்வினை.
Rectangle — செவ்வகம்
Resources — வளங்கள், சாதனங்கள்.
Return — விளைவு
Revenue — வருவாய், வருமானம்.
Rival commodities — போட்டிப் பண்டங்கள்
Run an bank — பாங்கு நெருக்கடி
Satiability — பூர்த்திசெய்யப்படும் தன்மை
Satisfaction — நிறைவு, திருப்தி.
Schedule — அட்டவணை
Security — பாதுகாப்பு
Shares — பங்குகள்
Short period — குறுங்காலம்
Significant solution — பொருளுடைய தீர்வு, சிறப்பான தீர்வு.
Simultaneous — உடன் நிகழ்
Single valued function — ஒரு மதிப்புடைமைச் சார்பலன்
Standerd of living — வாழ்க்கைத் தரம்
Substitute — பதிலி
Subsidy — உதவிக்கொடை
Substitution effect — பதிலீட்டுப்பயன், பதிலீட்டு விளைவு.
Supply — அளிப்பு
Symbol — குறியீடு
Table — அட்டவணை, பட்டியல்.
Tangent gradient — தொடுகோடுச் சாய்வு, சரிவு.
Taxation — வரி விதிப்பு

Taxation, effect of	—	வரி விதிப்பின் விளைவு
Taxation on monopoly, effect of	—	சர்வாதீனத்தில் வரி வி விளைவு
Tax Revenue, government	—	அரசாங்க வரி வருமான
Taxation, equilibrium after	—	சமநிலைக்குப்பின் வரி வி
Tax income	—	வரி வருமானம்
Technology	—	தொழில் நுண்ணியல்
Theorem	—	தேற்றம்
Theory	—	கருதுகோள், கோட்பா
Under constraint	—	சார்புடை, நிபந்தனைக்
Unit	—	அலகு
Unity	—	ஒன்று
Utility	—	பயன்பாடு
Utility form	—	உருவப் பயன்பாடு
Utility place	—	இடப் பயன்பாடு
Utility time	—	காலப் பயன்பாடு
Utility marginal	—	விளிம்புப் பயன்பாடு
Value	—	மதிப்பு
Value absolute	—	தனி மதிப்பு
Value relative	—	ஒப்பு மதிப்பு
Variable	—	மாறி
Variable dependent	—	சார்ந்த மாறி
Variable independent	—	சாரா மாறி
Verification	—	சரிபார்த்தல்
Wants	—	விருப்பங்கள்
Worker	—	உழைப்பாளி
Zero	—	பூஜ்யம்